

旋转平台Rossby波的实验模拟研究

周昂、卓静仪、王若瑜、胡越

(南京大学大气科学学院2013级, 南京 210046)

指导教师: 王元、周博闻

(南京大学, 大气科学学院, 教授, 南京 210093)

(南京大学, 大气科学学院, 副教授, 南京 210046)

摘要: Rossby 波是 β 效应控制下的大尺度地球流体运动体系中的经典波动模型。本文利用旋转平台对 Rossby 波进行实验模拟, 以探究地球中纬度地区大气 Rossby 波的形成机制和传播特点。实验中, 利用旋转平台模拟地球自转运动背景, 通过改变转速模拟中纬度地区高空的基本气流, 并利用斜坡水槽(和平底水槽)模拟等效地球 β 效应。在本实验物理参数控制下, 水面等效 β 效应与地形等效 β 效应相比可以忽略。在保证动力学相似的前提下, 利用控制变量法改变转速和水深, 对 Rossby 波的动力学机制进行验证。最后, 本文通过在斜坡水槽底部不同位置设置地形, 观察地形扰动对 Rossby 波生消发展的影响。

关键词: Rossby 波; 实验模拟; 等效 β 效应; 地形扰动

§1 引言

Rossby 波是 β 效应控制下的大型涡旋慢波, 由 Rossby 于 1939 年首次从理论推得。实际大气观测中, 在中高纬对流层中上层可以观察到 Rossby 波的运动——半球波数 3~6 个(即所谓的“冬三夏四”), 波长 50~120 个经距; 短波缓慢东移, 长波呈准静止状态或西退。

对于 Rossby 波的研究, 前人已有不少范例^[1]。如, Whitehead^[2]首次在实验中利用纬向扰动产生了 β 效应下的带状切向基流; Henrotay^[3]在实验中采用不同地形对 Rossby 波的流场特征进行研究; Chapman^[4]在实验中成功再现 Rossby 波的波形特征并记录下来。

随着技术的进步, 实验模拟已经成为研究 Rossby 波的有效手段之一; 其最大优点在于, 可视化强, 操作性高, 可直接对理论进行检验; 与此同时, 我们有可能在实验中发现新的现象, 从而推动理论的进一步发展。然而, 由于技术水平, 特别是核心技术的知识产权的限制, 国外有关 Rossby 波的研究提供的直接技术较少, 加之国内从事相关实验研究的机构为数不多, 给后人的模拟研究带来很大困难。为此, 本文通过学生自制实验旋转平台, 经过反复试验, 克服技术难题, 成功模拟出 Rossby 波现象, 对 Rossby 波的研究做出了有益探索。

前人所做的相关实验, 大多限于对 Rossby 波的某一特征进行探讨, 且只是强调 β 效应在 Rossby 波产生过程中的重要作用, 却很少从其他角度对实验本质进行分析。本文通过对实验操作及物理参数的详细描述, 对已有 Rossby 波理论进行了全面验证, 不仅对实验室条件下两种不同的等效 β 效应进行了对比验证, 更进一步从正压条件下位涡守恒和能量频散的角度对实验现象进行阐释。

本文所做的研究可为实验 Rossby 波的进一步研究提供可行性和可信度, 同时文中所提到的

实验技术和实验经验可为他人之后的实验研究作为参考。

§ 2 实验模拟

§ 2.1 理论机制

理论上可以证明，西风基流中的正压 Rossby 波控制方程^[5]为：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\right)\zeta + \beta v = 0 \quad (1.1)$$

其中 u 为西风基流速度， ζ 为相对涡度， v 为波动速度。利用标准波形法可以解出：

$$c_p = u - \frac{\beta L^2}{4\pi^2} \quad (1.2)$$

$$c_g = u + \frac{\beta L^2}{4\pi^2} \quad (1.3)$$

其中 c_p 是相速度，表示波形相位的传播； c_g 是群速度，表示波群或能量的传播。群速度恒为正，说明能量从东至西向下游传播，且速度快于基流速度——这种能量传播速度快于基流速度使得下游波形提前于平流作用发展起来的现象称为“下游效应”；相速度的正负取决于 β 值和波长 L 的乘积大小。在同一纬度处，波长较小，相速度为正，波形向西传播；波长较大，相速度为负，波形向西倒退。因此，在某一合适的波长 L_s 时，正负两项抵消而使相速度为 0，即波形准静止。于是，静止波的波长公式：

$$L_s = 2\pi\sqrt{\frac{u}{\beta}} \quad (1.4)$$

实际观测中，可观察到中高纬地区几个半永久性的活动中心^[6]，尺度约为 5000~6000km，沿纬圈呈准静止状态。按照 Rossby 理论，上述活动中心即可理解为准静止波槽或波脊。

群速度、相速度与波长的关系可表示如下（图 1）：

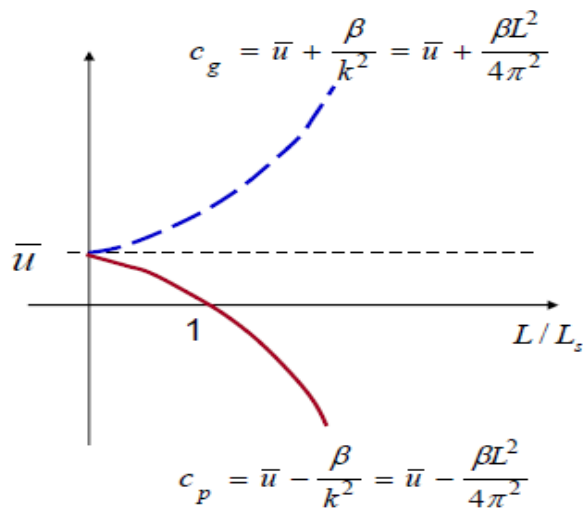


图 1 Rossby 波群速度相速度与波长关系（张熠，动力气象学）

可以发现, $c_g \geq u \geq c_p$, 且波长越大, 三者之间的差距越大。值得注意的是, 上图暗示我们, 似乎波长越大, 波形西退越快——然而大量天气观测事实表明, 超长波或者准静止, 或者由东向西缓慢倒退, 即该理论对超长波失效。原因在于, 正压 Rossby 波公式仅适用于涡度量级大于散度量级的情形, 故水平无辐散的假设对于超长波不再成立。

§ 2.2 实验简介

Rossby 波作为一种大尺度运动, 科氏力的存在起着重要作用。事实上, 在仅考虑一维基流时,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\frac{df}{dt} = \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2.2)$$

则公式(1.1)可改写为:

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0 \quad (2.3)$$

即 Rossby 波的运动受绝对涡度方程的约束。由于地球的曲面性, 科氏力参数 f 随纬度变化, 即所谓的 β 效应:

$$\beta = \frac{df}{dy} = \frac{2\Omega \cos \varphi}{a} \quad (2.4)$$

其中 Ω 为地球自转角速度, φ 为纬度, a 为地球半径。由于 β 效应的存在, 流场存在南北方向的速度时, 背景涡度的变化导致相对涡度 ζ 也随之变化, 从而影响流场本身的运动发展, 即出现 Rossby 波。地球恒稳的自转运动提供了该背景条件; 而在实验室中, 需要旋转平台 (图 2) 提供旋转环境。



图 2 旋转平台全景图

(旋转平台 $1.8 \times 1.8 \times 2.2\text{m}$, 可提供 $0.0 \sim 1.5\text{rad/s}$ 的顺逆时针双向转速, 分辨率达 10^{-4}rad/s ; 实验平台上放置水槽 (图 3), 顶部有监视器 (图 4), 随实验平台一起转动)

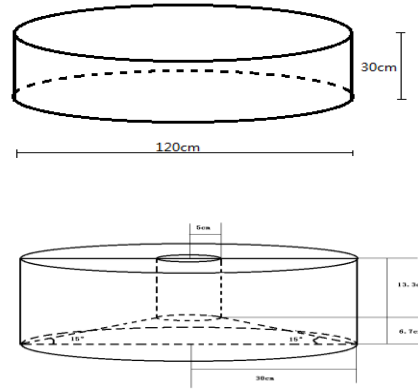
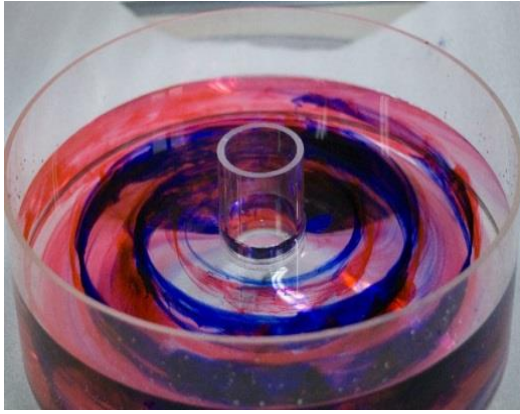


图3 实验水槽

(平底水槽(右上)半径60cm,高30cm;斜坡水槽(左和右下)半径30cm,中心圆柱半径5cm,高20cm,坡角 15°)



图4 监视器

(通过无线设备连接计算机,可实时观测、记录实验数据)

由于技术问题,我们在实验室中难以完整复现地球环境中的 β 效应,因此需要引入“等效 β 效应”的概念。

理论上可以证明,在假设背景涡度定常,考虑地表和流体层高度随空间变化的定常基流浅水模式中,可得:

$$c = u - \frac{f}{4L^2\pi^2} \left(\frac{\partial h_g}{\partial y} - \frac{\partial h_H}{\partial y} \right) \quad (2.5)$$

其中 D 为流体层平均厚度, $h_g(x,y)$ 为局地地表高度, $h_H(x,y,t)$ 为局地流体层高度。其实,该式和公式(1.2)对比即可发现,在地形和流体层高度发生变化时,对于波形相速度产生了和背景涡度变化具有同等作用的效果,这种效果就是“等效 β 效应”:

$$\beta' = \frac{f}{D} \left(\frac{\partial h_g}{\partial y} - \frac{\partial h_H}{\partial y} \right) \quad (2.6)$$

其中,第一项是由于地表高度的空间变化引起的,称作“地表等效 β 效应”;第二项是由于流体层高度的空间变化引起的,称作“流体层等效 β 效应”。

其实,利用绝热正压条件下位涡守恒方程:

$$\frac{f+\zeta}{D} = \text{const} \quad (2.7)$$

和 β 效应的定义式(2.4)，以及大尺度运动中背景涡度 f 远大于相对涡度 ζ 的条件，即可推导出等效 β 效应：

$$\beta' = -\frac{f}{D} \frac{dD}{dy} \quad (2.8)$$

其中 $\frac{dD}{dy}$ 为流体层整层厚度的空间变率，包含下边界作用（公式(2.6)第一项）和上边界作用（公式(2.6)第二项）。

这样，我们就分别从浅水模式和位涡守恒两个方面推导出等效 β 效应。上述约束方程的条件控制可在实验室中完成，证明该实验思路可行。但若要保证实验室条件和地球大气条件具有相似性，保证实验模型和原模型具有动力学本质的一致性，还需要符合相似原理^[7]——即控制实验室环境的动力学无量纲数与实际大气中的动力学无量纲数相近，从而保证实验的可信度。

流体力学实验中，需要首先满足的动力学参数如下：

$$R_e = \frac{uL}{\nu} \sim \frac{\text{特征惯性力}}{\text{特征粘性力}} \quad (2.9)$$

$$R_o = \frac{u}{fL} \sim \frac{\text{特征惯性力}}{\text{特征偏向力}} \quad (2.10)$$

$$\beta' = \frac{\beta L^2}{u} \quad (2.11)$$

通过特征值分析，实验室环境中 $R_e \sim 10^3$ （地球大气 $R_e \sim 10^{12}$ ），表示惯性力远大于分子粘性力，可将水看作无粘性流体； $R_o \sim 10^{-2}$ （地球大气 $R_o \sim 10^{-2}$ ），表示科氏力有重要作用，可模拟大尺度大气运动。同时，实验室 Rossby 参数 $\beta' \sim 1$ ，表示实验室环境中的 β 值有意义^[8]。

最后，根据动力学本质相似的原理，以水代替空气进行实验，同时依据不影响原流场且有效示踪的原则，选择墨水染色示踪流体迹线，以获得可直接观察的实验结果。结果表明，水和空气同时作为常见流体，它们在反映流场运动本质时并无明显差别。

有了以上可行性和可信度的保证，我们设计完成了以下实验。

§ 2.3 等效 β 效应验证实验

根据公式(1.4)，可通过观测实验中的静止 Rossby 波长 L_s 验证等效 β 效应。

已知匀速旋转流体在保持刚性稳定时，水面高度公式为：

$$H = \frac{\omega^2 R^2}{Dg} \quad (3.1)$$

其中 R 为距水槽中心的距离， g 为重力加速度。现同时考虑地表高度和水面高度随空间变化，根据公式(2.6)，代入实验参数，对比水面等效 β 效应和地表等效 β 效应的量级：

$$n = \frac{4\omega^2 R}{g} \sim 10^{-1} \quad (3.2)$$

发现二者相差一个数量级。为排除后者的干扰，突出水面等效 β 效应的作用，现用平底水槽（图 3 右上）作为对照。

实验中，先将水槽按恒定转速 ω_1 逆时针转动一段时间（约 10min）；待流体刚稳后，设置较

小转速差 $\Delta\omega$ ，以产生切向基流；之后在改变后的转速 ω_2 下，滴加墨水示踪，观察实验现象。通过放置在旋转平台顶部的监视器，我们将波速小于 $\frac{u}{30}$ m/s的波定义为准静止波（图5）。通过控制转速差 $\Delta\omega$ 恒定，改变转速调节 β 值，将静止波长随转速的变化实验结果点画在图6上；同时利用静止波长公式和水面等效 β 效应表达式，将理论值曲线同样画出。

其中，由于水槽固壁摩擦力的影响，基流速度 u 从改变转速后一直减小趋近于 $\omega_2 R$ 。这里我们取线性变化，并设比例系数 k ：

$$u = k \Delta \omega R \quad (3.3)$$

通过大量实验验证， k 取 0.28。



图5 平底水槽 Rossby 准静止波实验

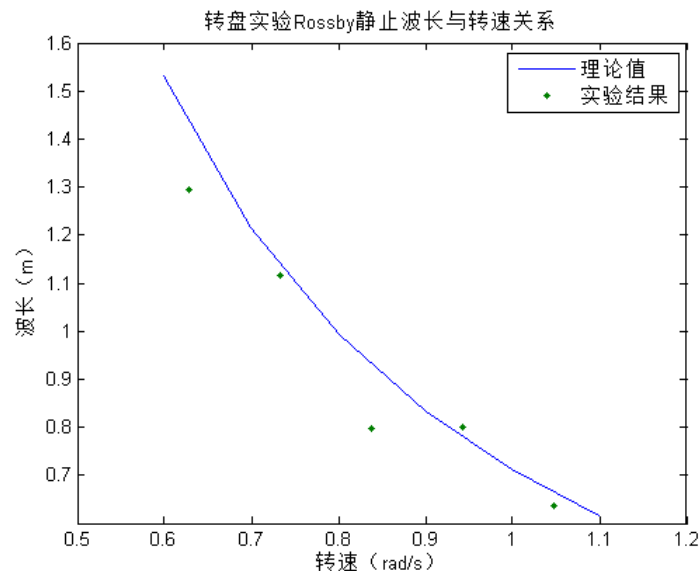


图6 静止 Rossby 波长随转速变化的理论和实验结果对照

(其中实线为理论值，符合 $L_s = \pi \sqrt{\frac{2k\Delta\omega Dg}{\omega^3}}$ ， $\Delta\omega$ 取 0.105， D 取 0.1；实点为实验值，依次为(0.6283,1.295), (0.7330,1.117), (0.8378,0.796), (0.9425,0.800), (1.0472,0.636))

上图实验结果和理论曲线大致吻合，即验证了水面等效 β 效应在实验 Rossby 波产生过程中的重要作用。

然而，在改用斜坡水槽（图 3 右下）重复上述实验时，由于数量级的差异，可忽略上述影响。直接将地表等效 β 效应项 $\frac{2\omega}{D} \times \tan 15^\circ$ 代入公式(1.4)可得：

$$L_s = 2\pi \sqrt{\frac{2k\Delta\omega RD}{\omega}} \quad (3.4)$$

在此基础上，同样将波速小于 $\frac{u}{30}$ m/s的波定义为准静止波（图 7），在保持切向基流速度相同的情况下将静止波长随转速的实验结果画出来（图 8）。

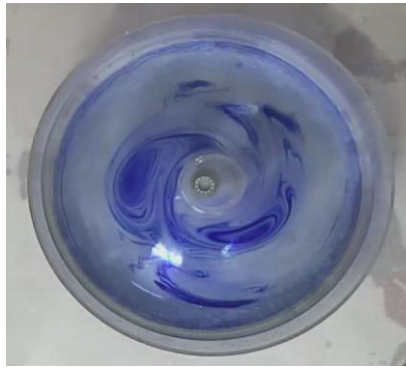


图 7 斜坡水槽 Rossby 准静止波实验

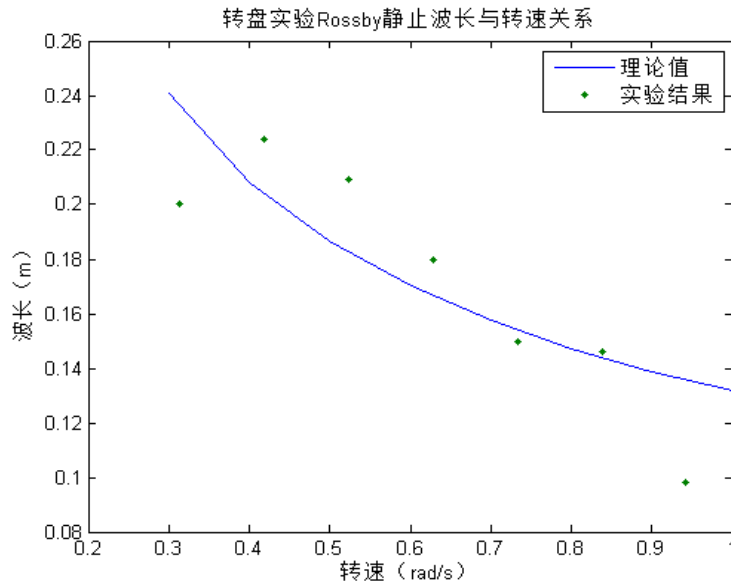


图 8 静止 Rossby 波长随转速变化的理论和实验结果对照

（其中实线为理论值，符合 $L_s = 2\pi \sqrt{\frac{2k\Delta\omega RD}{\omega}}$ ， $\Delta\omega$ 取 0.105，R取 0.15，D取 0.1；实点为实验值，依次为(0.3142,0.200), (0.4189,0.224), (0.5236,0.209), (0.6283,0.180), (0.7330,0.150), (0.8378,0.146), (0.9425,0.098)）

通过图像即也可以说明地表等效 β 效应在实验 Rossby 波产生过程中的重要作用

以上两个对照实验，分别从水面等效 β 效应和地表等效 β 效应的角度，讨论了实验室条件下等效 β 效应对 Rossby 波产生过程的重要作用。值得注意的是，由于前者的数量级小于后者，实验过程中往往忽略其作用。这里需要强调的是，在斜坡水槽旋转实验中可以简单认为只有地表等效 β 效应；但是在平底水槽旋转实验中，前项作用不可忽略。

以上实验是通过改变转速来探究等效 β 效应的；其实仔细观察公式(3.4)可以发现，我们还可以设定转速恒定，改变水高以求更精确的吻合，于是进行了以下实验。

§ 2.4 静止波长与水深关系实验

现保持旋转平台转速不变，只改变平均水深，再将实验结果和理论值作对比（图 9）：

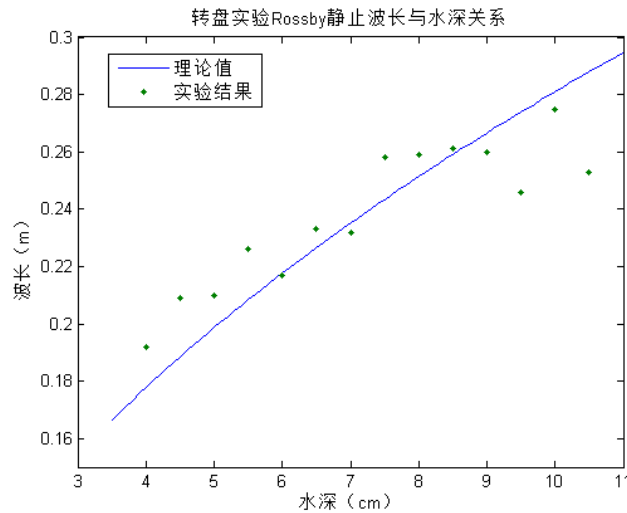


图 9 静止 Rossby 波长随水深变化的理论和实验结果对照

（其中实线为理论值，符合 $L_s = 2\pi \sqrt{\frac{2k\Delta\omega R D}{\omega}}$ ， $\Delta\omega$ 取 0.209，R 取 0.15， ω 取 0.733；实点为实验值，依次为(4.0,0.192), (4.5,0.209), (5.0,0.210), (5.5,0.226), (6.0,0.217), (6.5,0.233), (7.0,0.232), (7.5,0.258), (8.0,0.259), (8.5,0.261), (9.0,0.260), (9.5,0.246), (10.0,0.275), (10.5,0.253)）

在数据密度更大的情况下，实验结果与理论值基本吻合。综合图 6、图 8 和图 9 的结果，我们分别从 Rossby 波产生机制——等效 β 效应、静止波长与转速的关系、静止波长与水深的关系等角度讨论了 Rossby 波的性质，不仅说明了在不同情况下两个等效 β 效应项的大小关系，而且利用实验结果验证了静止 Rossby 波的理论的正确性。但以上实验多集中于准静止波的探究，且由于扰动较小，由墨水示踪的可见波数较少。因此，接下来我们加入地形的因素，使得扰动变大，并试图借此观察到更多的波数。

§ 2.5 地形扰动下的 Rossby 波实验

正压浅水模式中，正压不稳定的能量来源于切向基流。若不添加外力强迫，单独依靠基流本

身发展起来的 Rossby 波能量有限，不仅可见波数少，且波形出现的时间慢。为了观察到更为符合实际的 Rossby 波现象，我们在斜坡水槽的底部加入地形扰动（图 10）。

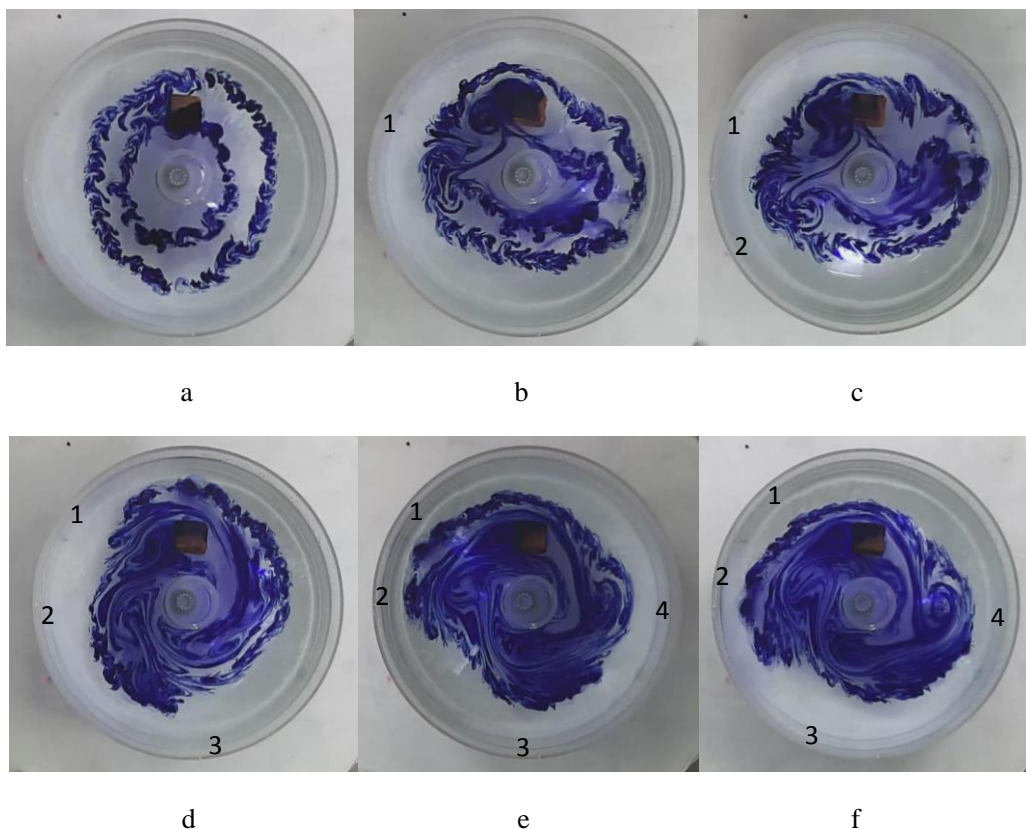


图 10 斜坡水槽障碍物地形强迫位置

（从左至右障碍物放置距离水槽中心分别为 10cm、15cm、20cm）

地形为 $60 \times 65 \times 40\text{mm}$ 的立方体，密度比水大，可稳定放置在水槽底部。这样，刚稳的流体在改变转速后形成的切向基流便会受到外力强迫的作用，通过地形时发生绕流或爬流。由于地形的形状位置稳定，产生的强迫作用也相对稳定持久；但因其放置位置不同，会产生不同的效果。

加入地形，先将水槽按恒定转速 ω_1 逆时针转动一段时间（约 10min）；待流体刚稳后，设置较小转速差 $\Delta\omega$ ，以产生切向基流；之后在改变后的转速 ω_2 下，滴加墨水示踪，观察实验现象。通过监视器得到以下图像（图 11）：



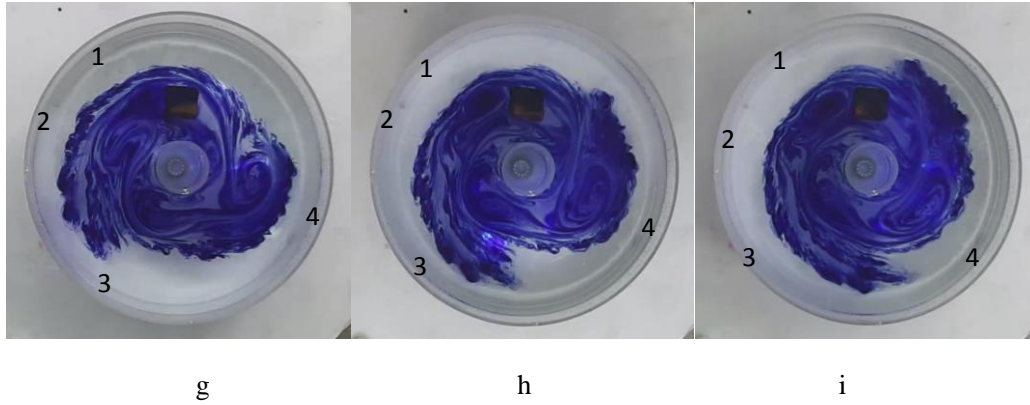


图 11 斜坡水槽地形强迫下 Rossby 波实验

(地形放置在距离水槽中心 10cm 的位置, 改变转速后切向基流为逆时针方向; 各图截取时间依次为改变转速后的 0、14、22、40、57、65、71、87、99(s)。其中, 图 b~e 逆时针方向依次形成第 1~4 个涡旋; 之后图 f~i 四个涡旋顺时针移动; 图 h 和图 i 中, 由于上游地形的阻挡, 第一涡旋无法顺利倒退, 且第二涡旋发生较大形变)

以上图像中, 图 a 至图 e 反映出地形强迫下的 Rossby 涡旋顺基流方向依次出现, 表示能量向下游传播; 图 e 至图 i 中, 每个涡旋又逆基流方向移动, 表示相位向上游传播。结合公式(1.2)和(1.3)可知, 这是 Rossby 波特征的必然结果。同时, 由以上两个公式, 可以反演出一段时间内水槽的平均基流速度:

$$u = \frac{c_p + c_g}{2} \quad (5.1)$$

和此时的波长:

$$L = \pi \sqrt{\frac{2(c_g - c_p)}{\beta}} \quad (5.2)$$

则利用公式(1.4)、(5.1)和(5.2)可反演验证 Rossby 波的相速度 c_p :

$$c_p = \frac{\beta}{4\pi^2} (L_s^2 - L^2) \quad (5.3)$$

根据上述三个公式, 通过大量的实验, 得出以下数据结果:

表 1 不同位置地形 Rossby 波实验参数表

地形位置	相速(m/s)	群速(m/s)	反演群速(m/s)	理论基流(m/s)	反演基流(m/s)	波长(m)	反演波长(m)	频散强度
距离中心 10cm	-0.0034	0.0100	0.0104	0.0038	0.0033	0.2018	0.2127	4.0414
距离中心 15cm	-0.0039	0.0148	0.0146	0.0053	0.0054	0.2400	0.2523	3.4447
距离中心 20cm	-0.0037	0.0184	0.0177	0.0067	0.0073	0.3018	0.2739	3.0062

其中频散强度定义为:

$$\text{频散强度} = \frac{c_g - c_p}{u} \quad (5.4)$$

表示波形变形的强弱程度。实际大气中, $\frac{c_g - c_p}{u} = \frac{2L^2}{L_s^2} = \frac{2L^2\beta}{4\pi^2u}$, 因高纬度地区 β 小, 频散强度小; 低纬度地区 β 大, 频散强度大, 所以半永久系统总是出现在高纬度地区。但在该实验中, “高纬度” (即距离水槽中心近) 地区的平均基流速度小, 频散强度大; “低纬度” (即距离水槽中心远) 地区的平均基流速度大, 频散强度小 (图 12)。

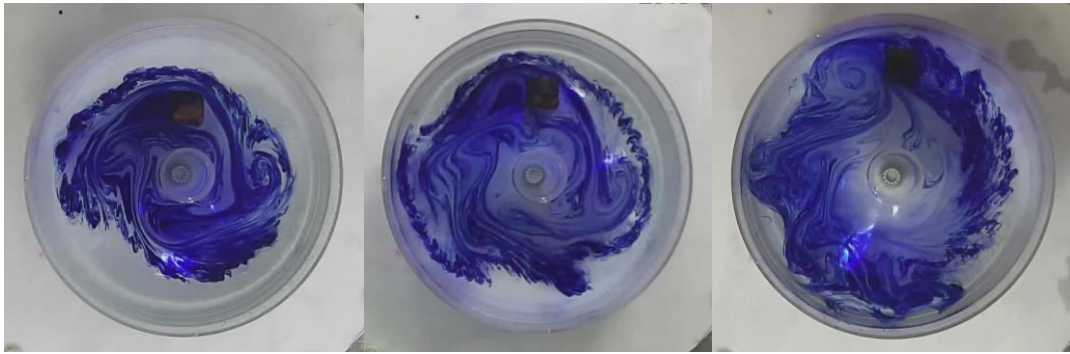


图 12 不同位置地形 Rossby 波频散强度对比实验

(从左到右地形依次放置在距离水槽中心 10cm、15m、20cm 处; 统一截取改变转速后 60s 的图像)

对比加入地形前后的实验结果, 我们发现加入地形后:

- (1) 波形出现的时间更快 (前者需要约 2~3min, 后者只需要要 5~10s);
- (2) 由墨水示踪的可见波形更多更完整 (前者 (如图 7) 波数少且会出现扰动小涡, 后者 (如图 12) 波形规则);
- (3) 由墨水示踪的波形产生 “西退” 现象 (前者波形多呈准静止状态, 后者出现频散现象且可观察到波形缓慢后退)。

§ 3 结语

地球大气中的 Rossby 波是绝对涡度守恒控制下的 β 效应引起的大型涡旋慢波; 实验室条件下, 由于流体层厚度的变化不可忽略, 绝对涡度守恒扩展为正压条件下的位势涡度守恒, 同时 β 效应也转化为等效 β 效应。

在相似理论指导下, 实验首先利用静止 Rossby 波长与旋转平台的转速关系实验验证等效 β 效应, 其间分别用平底水槽验证水面等效 β 效应, 以及用斜坡水槽验证地表等效 β 效应; 实验结果与理论曲线较为符合——这提醒我们, 在平底水槽旋转实验中不可忽略前者的等效 β 效应。

除了静止波长与转速关系的验证实验外, 我们还进行了静止 Rossby 波长与水高关系实验, 即在同一转速下改变水高, 从而获得一系列实验数据。将实验结果与理论曲线作对比, 发现吻合度很好。至此, 准静止 Rossby 波验证实验获得较好结果。

但是，由于没有地形扰动，用于发展 Rossby 波的能量来源较小，产生的可见波数较少，无法观察到连续的 Rossby 波形；于是我们进行了第三个实验，即地形扰动下的 Rossby 波实验。结合 Rossby 波理论，利用波形群速、相速与切向基流的关系，不仅反演出与实验测量较为吻合的群速度、基流速度和波长，而且从频散的角度解释了实验中观察到的现象。至此，实验室条件下验证 Rossby 波理论的实验研究完整结束。

致谢

南京大学大气科学学院 2015 届本科生，傅豪

南京大学大气科学学院流体力学实验室

参考文献：

-
- [1] 张晓爽，吕红民. 利用旋转平台模拟 Rossby 波现象的实验研究[J]. 中国海洋大学学报（自然科学版），2010，40 (Sup) 009-015
 - [2] Whitehead, John A. Mean flow generated by circulation on a β - plane: An analogy with the moving flame experiment[J]. Tellus, 2010, 27(4): 358-364
 - [3] Henrotay P. Topographic effects on solitary Rossby waves[J]. Dynamics of Atmospheres & Oceans, 1981, 6(1): 29-47
 - [4] Chapman C. Ross by waves and the Polar vortex[R] . Washington: geophysical fluid dynamics Laboratory , university of Washington, 2006 . [http : // www.ocean.washington.edu/research/gfd](http://www.ocean.washington.edu/research/gfd).
 - [5] 吕克力，徐银梓，谈哲敏. 动力气象学[M]. 南京大学出版社. 2014-01
 - [6] 伍荣生. 天气学原理[M]. 高等教育出版社. 2011-08-01
 - [7] 余志豪，苗曼倩，蒋全荣等. 流体力学[M]. 气象出版社. 2004-06-01
 - [8] 刘式适，刘式达. 大气动力学[M]. 北京大学出版社. 2011-11-11

An Experimental Study of Rossby Wave in the Rotating Tank

Zhou Ang, Zhuo Jing-yi, Wang Ruo-yu, Hu Yue
(2016', School of Atmospheric Science, Nanjing University, Nanjing 210046)

Mentor: Wang Yuan, Zhou Bo-wen, Song Jin-jie
(School of Atmospheric Science, Nanjing University, Nanjing 210046)

Abstract: Rossby wave which is dominated by β effect is one of the classical models of large-scale geophysical fluid. This paper studied the laboratory simulation of Rossby waves on rotating table aimed to explore the generate mechanisms and features of Rossby waves in mid-latitude atmosphere and ocean. In experiments, rotating table provided a Coriolis force background. By controlling the rotation speed of the tank, we could imitate basic flow in the mid-latitude. The β effect, which is the main cause of Rossby waves, was simulated by a rotation tank with slope, and the water surface's equivalent β effect was proved to be ignored comparing to the slope's equivalent β effect. Under the restraint of dynamical similarity, the paper used variable controlling method by controlling rotation speed, the depth of water and other variables to demonstrate the dynamics and principles of Rossby waves. In the end, experiments with obstacle on different places on the rotation tank slope were conducted to observe the different experimental phenomenon, like the formation, disappearing and development of Rossby waves, which came from no obstacle experiments.

Key words: Rossby waves; Experimental simulation; Equivalent β effect; Terrain disturbance