

南京大学本科生毕业论文（设计、作品）中文摘要

题目：基于涡度-速度法的旋转热对流并行模式设计及涡旋结构研究

大气科学学院 院系大气科学 专业2011级本科生姓名：傅豪

指导教师（姓名、职称）：王元 教授

摘要：

本文介绍了新研发的旋转热对流数值模式和旋转热对流涡旋结构的一个解析模型。在数值模式方面，将有限体积法引入了 MAC 网格下的涡度-速度法，在差分方程占据等量格点数的前提下具有高于有限差分法的精度。在矢量泊松方程求解方面，针对 MAC 网格引入多重网格法，给出了对应的粗网格嵌套方案和保证散度守恒性的限定算子和延拓算子，在等距网格试验时能加速到 50 余倍，非等距网格时经调整可加速到 4 倍多。模式的热流量方程经过了刚体平流测试，其余动力模块通过了方腔流测试。进行了一次旋转热对流测试，模式能模拟出对流爆发和涡旋相互作用等过程。为了适应湍流模拟需要，我采用了直接对计算区域分块进行分布式存储和分布式计算的 MPI 并行方法，在 80 个 CPU 时最多可加速 24 倍。在涡旋结构研究方面，作者从垂直涡度方程出发，利用相对涡度随高度线性变化的实测特点和涡核区涡度、散度均匀的假设导出了关于垂直速度满足的常微分方程。方程的解较好地刻画了流体中部垂直速度随高度基本均匀的特点。最后，作者考察了经典 Ekman 抽吸理论在旋转热对流中的适用性，将实测涡度代入求得的垂直速度仅为实测值的 40%，可能是未考虑斜压性所致。

关键词：旋转热对流；涡度-速度法；并行计算；涡旋建模

南京大学本科生毕业论文（设计、作品）英文摘要

THESIS : The Design of A Parallel Numerical Model Based on Vorticity-Velocity Formulation And Research on The Structure of Rotating Turbulent Convection

DEPARTMENT: School of Atmospheric Sciences

SPECIALIZATION: Atmospheric Sciences

UNDERGRADUATE: Fu Hao

MENTOR: Wang Yuan

ABSTRACT:

This paper introduces a new parallel CFD model and an analytical model for rotating turbulent convection. As for the CFD, finite-volume method has been preliminarily introduced to vorticity-velocity formulation on MAC grid, and has enhanced the same accuracy compared to an equally computationally-efficient finite-difference approach. A multigrid method is introduced to the vector Poisson equations on MAC grid, and divergence free difference operators are presented. The scheme could accelerate the Poisson equations solver for 50 times with uniform grid, and 4 times with nonuniform grid after adjustment. The thermal flux equation has undergone rigid body advection test, and the dynamic module has gone through cavity driven flow test. A rotating turbulent convection test is complete, indicating the model's relatively good performance on simulating convection initiation and vortex merge processes. In order to be capable of DNS, a distributed storage & distributed computation strategy is adopted, with 80 CPUs' speed reaching 24 times than sequential computation. As for vortex structure research, a simplified vertical vorticity equation is derived with the assumption that divergence and vorticity is uniform in vortex core region, and an ODE for w is obtained. The analytical solution depicts the relatively uniform w profile in the medium of the tank well. In the end, the feasibility of introducing Ekman pumping theory into the rotating turbulent convection boundary layer is discussed. The w derived from the theory underestimates the measured result by 60%, which is preliminarily attributed to the omission of baroclinic effect.

KEY WORDS: rotating turbulent convection; vorticity-velocity formulation; parallel computation; vortex model

目录

南京大学本科生毕业论文（设计、作品）中文摘要.....	I
南京大学本科生毕业论文（设计、作品）英文摘要.....	II
1 绪论.....	1
1.1 选题背景和研究意义.....	1
1.2 国内外研究进展.....	2
1.2.1 旋转和加热的作用.....	2
1.2.2 边界摩擦的作用.....	4
1.2.3 宽高比的影响.....	4
1.2.4 涡旋生成机理及模型.....	5
1.3 论文研究思路.....	6
2 模式基本框架.....	8
2.1 选择湍流直接模拟的理由及其技术要求.....	8
2.2 旋转热对流数值模拟的空间分辨率要求.....	9
2.3 湍流直接模拟算法的设计原则.....	10
2.3.1 差分方程的物理性质与数学性质.....	11
2.3.2 有限差分法和有限体积法.....	13
2.3.3 高分辨率模拟的计算要求.....	14
2.4 不可压 Boussineq 流体 N-S 方程的涡量-速度形式.....	15
2.5 涡量-速度方程组的守恒特性及非等距网格下守恒差分格式的构造.....	17
2.5.1 满足 Cauchy-Riemann 关系的矢量泊松方程差分格式.....	17
2.5.2 满足涡度无辐散的差分格式.....	21
2.6 有限体积法中的扭转项计算方法.....	23
2.7 方程的无量纲化.....	25
2.8 模式计算方案.....	26
2.8.1 涡度方程空间差分格式.....	26
2.8.2 热流量方程的空间差分格式.....	28
2.8.3 时间积分方案.....	29
2.8.4 矢量泊松方程的数值解.....	33
2.8.5 多重网格 Weighted-Jacobi 迭代法.....	34
2.9 非等距网格生成、初始条件和边界条件.....	46
2.9.1 非等距网格.....	46
2.9.2 边界条件.....	47
2.9.3 初始条件.....	48
2.10 模式的方腔流测试.....	49
2.11 模式的算法结构及 MPI 并行架构.....	50
2.11.1 并行计算原理.....	51
2.11.2 并行编程模型的选择.....	52
2.11.3 模式算法结构.....	53
2.11.4 模式并行性能测试.....	55

2.12	旋转热对流模拟算例.....	56
3	高速旋转状态下涡旋结构的建模.....	58
3.1	前人的涡旋模型.....	58
3.1.1	Veronis 的波动解.....	58
3.1.2	Vorobieff 的 Sullivan 涡.....	59
3.1.3	Julien 的 thermal Ekman layer.....	60
3.2	实验装置和实验步骤.....	61
3.3	实验结果.....	62
3.4	涡旋结构建模.....	62
3.4.1	涡度方程各项量级比较.....	64
3.4.2	方程简化与定性讨论.....	66
3.4.3	方程求解.....	69
3.4.4	涡旋结构的一种解释.....	71
3.4.5	模型的问题.....	72
3.4.6	补充: 计算 W_0 的可行性.....	72
4	总结与展望.....	74
	参考文献.....	77
	致谢.....	82

1 绪论

1.1 选题背景和研究意义

旋转流体中的湍流热对流是地球物理流体乃至恒星大气中重要的流体运动形式，它的发生发展决定着内能向动能的转化率和传热能力，并协调着流场和温度场。所谓“旋转流体”，可理解为约束流体的各种热力动力边界条件都在同步旋转，以致问题可以转化为流体在科氏力和离心力场中的运动。我们研究的问题中重力远大于离心力，因此只讨论科氏力的作用。从动量的观点来看，科氏力不做功而只使运动物体偏转；从涡度和散度的观点来看，旋转流体的牵连涡度将二者联系起来，正涡度区必有水平辐合，负涡度区必有水平辐散，任何非地转运动都要有向地转运动适应的趋势。当运动是由热力驱动的自由对流时，热泡则会扭曲成螺旋状。

Julien 等总结指出（1996）对太阳而言，其内部不断产生的热量造就了一个占据太阳外层厚达半径 25%深度的对流区，这种深对流必须要考虑可压缩性和太阳球面特性；对于像木星、土星这样的大行星，它们旋转更快而内热产生率远低于太阳，具有像地球上西风急流一样的 Zonal Jet；海洋中的对流可由冷源驱动（Marshall 等，1999），而有限的海深导致它较前两者而言都浅得多，对流由大气状况导致的海表面冷却的时空非均匀特性驱动。这三种现象的各自决定因素还包括太阳流体所受的电磁力、海水中的盐度等。结合 Boubnov 等人的工作（1996），我们将其共性归纳为一组外参数和一组内参数：

控制这种热对流的外参数有：流体上下表面的温差、流体厚度 H ，地转角速度 Ω ，重力加速度 g ；内参数有流体运动学粘性系数 ν ，热扩散系数 K ，热膨胀系数 α 。在有侧边界时，还要考虑宽高比 $\Gamma = D/H$ ， D 为容器水平宽度。

我们将其组合为 4 个控制参数：

$$Ra = \alpha g \Delta T H^3 / \nu K, \quad Pr = \nu / \kappa, \quad Ta = 4\Omega^2 H^4 / \nu^2, \quad \Gamma = D / H$$

Ra （瑞利数）是无量纲化温差，刻画热流驱动湍流流动的强度； Pr （普朗

特数)是流体本身的属性,反映了动量扩散和热扩散的相对大小; Ta (泰勒数)即“旋转雷诺数”,表征偏向力和粘性力的强弱。

系统的2个响应参数(周全等,2002)为纳赛尔数 $Nu = JH / \chi\Delta T$ 和雷诺数 $Re = uH / \nu$ 。前者是对流传热与热传导功率之比,表征对流传热的效率,后者表征湍流强度。

1.2 国内外研究进展

热对流研究可从宏观传热性质和微观涡旋结构两方面入手。我们首先介绍人们对旋转和加热的基本作用的认识,然后介绍涡旋生成中边界层的作用以及前人对涡旋结构模型的探索。

1.2.1 旋转和加热的作用

Benard(1990)在底部均匀加热,上部均匀冷却的流体在涨落的作用下失稳生成规则排列的六角形对流胞,发现了热对流固有的自组织特性。这种简单外强迫下产生的复杂对流引起了各学科的关注。

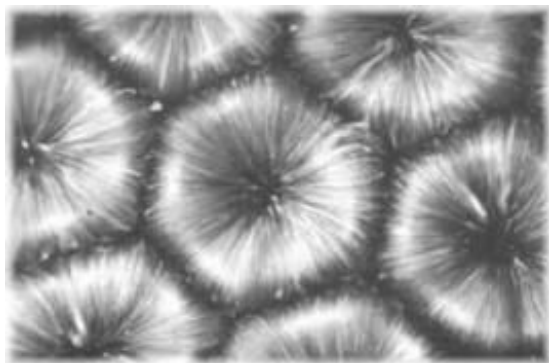


图 1-1a: Benard 对流胞



图 1-1b: 泰勒柱

(<http://jakubeit.net/convection-in-fluids>)

Taylor(1923)也在20世纪初研究了平台旋转对流体运动的影响,发现当转速足够快时,流体高低层的运动趋于同步,垂直运动被强烈抑制。这一现象被称为“泰勒柱”,如图1-1b(周昂等拍摄于学生创新实验室)。Taylor推测:旋转使流动二维化。

Nakagawa 等（1955）组合了两种情况，在旋转平台上研究了上表面冷却引发的热对流。他发现热对流的发生的确比无旋转时需要更大的温差，验证了 Taylor 的猜想。在逆时针旋转的参考系中，他还发现上升流所在区域总是低层呈逆时针旋转，高层顺时针旋转，这意味着流体微团的角动量守恒。这一螺旋流场和大气中的气旋和台风有一定相似性。

Boubnov 等人（1986）通过分析照片发现涡旋的水平尺度仅由平台旋转速度决定。他们于 1990 年（Boubnov 等，1990）发现旋转和加热的相对强弱决定了流场的状态。随着加热变强，流体经历了从静止、有序对流、地转湍流到完全湍流的演变，旋转使涡旋趋于有序，加热使涡旋趋于无序。

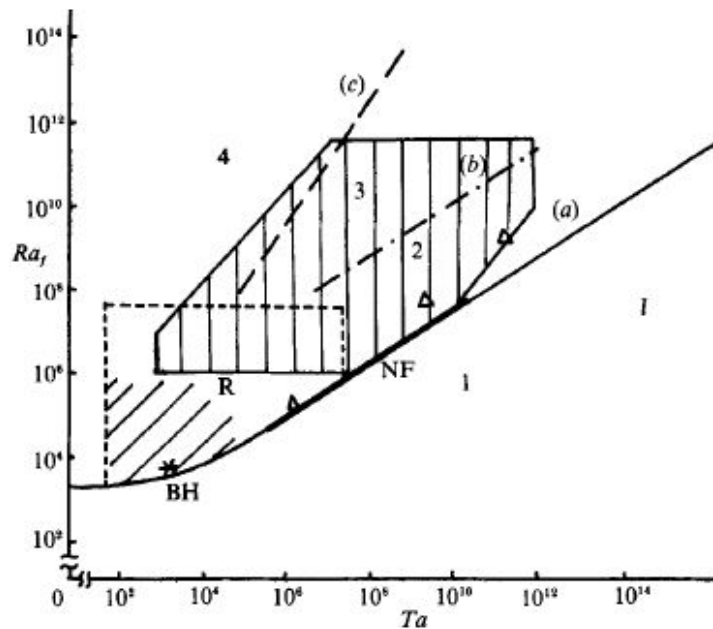


图 1-2: Boubnov 总结的旋转热对流参数分区

当 Ta 足够大时（平台旋转足够快），流体会直接由静态热传导状态转变到地转湍流，略过有序对流状态。这时，从静止到对流的判据由 Kupper-Lortz 不稳定给出（Kuppers 等），代替了无旋转和弱旋转时的 Raileigh-Taylor 不稳定。这很像热力学相图中液-汽相变曲线和固-液相变曲线重合的情形。

1.2.2 边界摩擦的作用

Stevens 等人 (2009) 证实了旋转热对流中存在 Ekman 抽吸, 并显著影响着传热。若平台从静止开始增大旋转速度, 传热效率会随 Ekman 抽吸的增强而先增大, 直到进入到地转湍流的某一转速后由于垂直速度扰动被旋转所抑制, 传热开始下降。Ekman 抽吸发生时, 辐合的微团在角动量守恒约束下产生一定正涡度, 同时上升运动伴随的涡管拉伸使垂直涡度进一步增大, 反过来又会增强边界层内的抽吸。这一结果被认为有潜在工业价值。

Julien 等人 (1996) 利用 DNS 结果在地转湍流参数区间内建立了热力 Ekman 层理论, 即温度扰动引发的边界层运动。他发现与经典理论不同的是气旋性的上升运动区中心是一个反气旋式的下沉气流区 (很遗憾我们在实验中并未观察到)。作者还通过有无边界摩擦的对比实验发现无滑脱边界的摩擦导致了 Ekman 抽吸并促进了辐合, 使涡旋更局地化。我的理解是, 如果没有边界摩擦, 入流微团的角速度会越来越大, 导致离心力和压力梯度力在径向上平衡从而抑制径向辐合运动, 仿佛台风眼的形成机理。

Kunnen 等人 (2010) 对比了边界层内外的涡旋统计特征。他们应用了双目视觉原理的 SPIV 技术, 可反演一个薄层内的三维流动。他们用单层测量数据验证了数值模拟结果的可靠性, 然后由整个三维流场数值模拟结果进行统计发现在远离上下边界的区域内涡旋半径和数密度基本与无量纲旋转速度 (Ta 数) 无关。这说明边界层内外流场性质有很大差异。

1.2.3 宽高比的影响

Stevens 等 (2011) 用 DNS 研究了宽高比对对流的影响, 发现 Ro 足够小 (旋转足够快) 时宽高比对 Nu (传热能力) 和各种涡旋统计量几乎没有影响。这是因为流体传热性质强烈依赖于流动结构, 而强旋转约束使涡旋局地化, 涡管近乎直立, 流动边界影响较小。下图给出了 $Ra = 2.91 \times 10^8$, $Pr = 4.38$ 情形下给定 3 组不同的宽高比, Nu 随 Ro 的变化情况, 我们发现 $Ro < 1$ 后宽高比影响不大了。

这一结果还表明，将周期边界条件的数值模式用于研究旋转热对流传热性质是可靠的。我认为，这还意味着在流体实验中，如果平台旋转足够快，水槽的宽高比不必太大即可大幅削弱边界的影响。

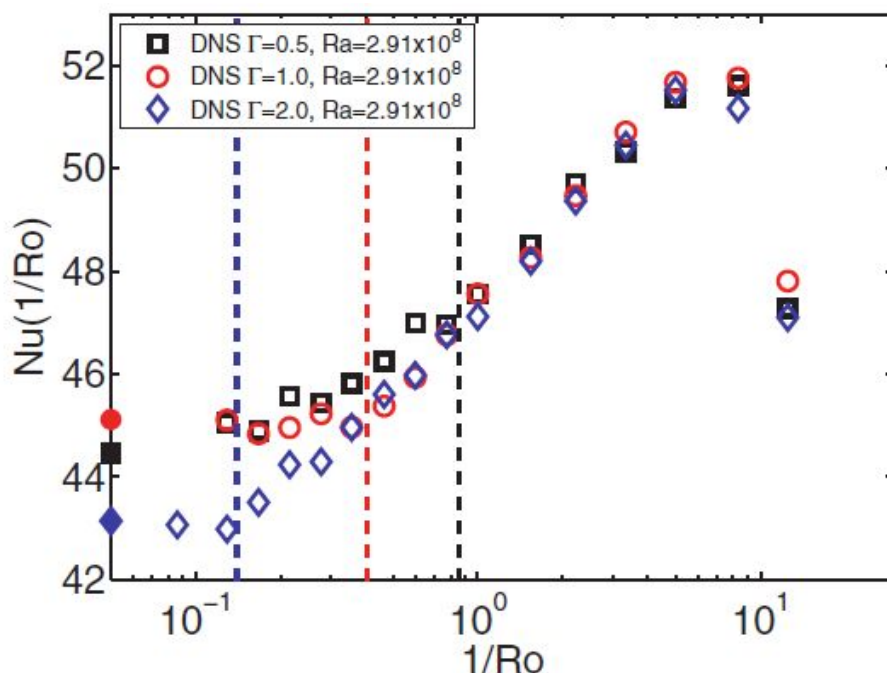


图 1-3: Stevens 的数值试验结果: 在 Ro 较大时宽高比对传热影响不大

1.2.4 涡旋生成机理及模型

Veronis (1959) 在边界无粘条件下用小扰动方法简化方程组，给出了卷状、长方形和六角形三种特解。其中长方形和六角形的解中涡旋都具有低层气旋式辐合、高层反气旋式辐散的特征，流体关于中层上下呈反对称，很像大气中气旋和反气旋组成的流场。涡旋垂直速度呈现边界附近小、中层最大的余弦函数。不过，他并未给出这一解适用于哪个参数区间。

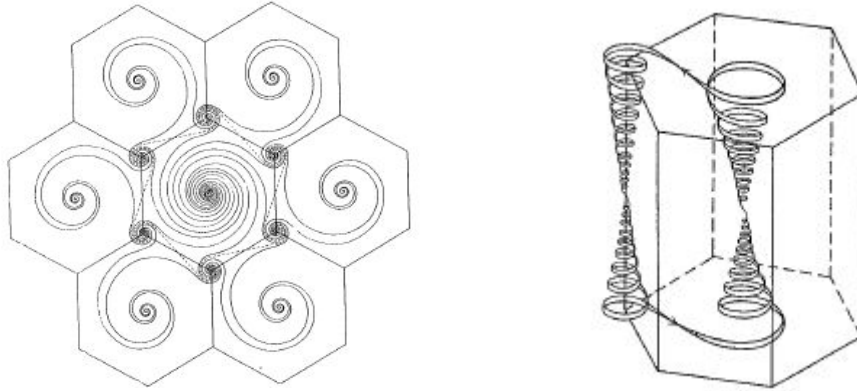


图 1-4: Veronis 的六角形涡旋模型: 左图为俯视, 右图为立体图

Vorobieff 等人 (1998, 2002) 最早将 PIV 技术应用于旋转热对流研究, 定量地分析了边界粘性控制下的涡旋结构。他们利用单层二维速度场, 发现在旋转较慢时测量出的涡旋与流体力学中的精确解 Sullivan 涡十分相似: 下沉区处在上升区之间的环状狭缝中, 这意味着上升流和下沉流并非 Veronis 所预言的上下反对称。他们又考察了涡度的偏度, 发现平台无旋转时流体内偏度为 0, 随着旋转提速, 上边界附近正涡度明显占优, 至 Ro 为 0.19 时偏度开始下降, 且正涡度都集中在边界附近。他们认为平台转速合适时边界摩擦作用下的辐合流 (即 Ekman 抽吸) 会带来正涡度涡旋, 待微团进入流体内部后在湍流混合之下涡度迅速减小。当旋转较强时, 作者认为流体进入了“气旋和反气旋平衡的状态”, 因而偏度又恢复到接近于 0, 解释比较模糊。我认为, 反气旋可能是上升流 (下沉流) 触及顶板 (底板) 后涡管收缩, 类似 Ekman 抽吸的逆过程; 当旋转将涡旋尺度限制在较小范围内后, 涡管趋于直立, 流体内部运动也必然由垂直运动主导, 上升流在离开边界时生成气旋后会在正上方形成反气旋, 形成一对螺旋涡。它和 Veronis 的涡形态相似, 但涡度可能更会向上下边界集中。另外, 从实验视频上看, 也不排除在几个气旋之间会因水平摩擦作用生成反气旋。

1.3 论文研究思路

本人首先明确了旋转热对流背后的自然现象, 选定用湍流直接模拟的方法进行研究。在众多方法中经过比较, 选择涡量速度法。随后对这一方法进行了研究,

- (1) 用有限体积思路推导了控制方程组，着重改进了扭转项处理；
- (2) 明确指明了确保非等距网格下 Cauchy-Riemann 关系的差分格式。
- (3) 将多重网格法引入涡量-速度矢量泊松方程的计算，提高了计算效率。
- (4) 为满足 DNS 巨大的计算量和内存需要，设计并实现了该模式的 MPI 并行架构。

随后，本人尝试建立了一个刻画旋转热对流涡旋垂直速度廓线简化解析，并对控制涡旋结构的动力因素进行了讨论。

2 模式基本框架

我们希望能做出一个能再现实验环境的数值模式。由于工作流体是水， $Pr = 7.1$ 。一般 Ra 越大，湍流越强，所需的分辨率就越高。 Ta 越大，湍流一般越弱，因而我们在给定模式技术指标时考虑 $Ta = 0$ 这一极端情况。一般实验中 Ra 能达到 10^8 ，根据 Boubnov (1996) 总结的旋转热对流分区，当平台不旋转时，流体处于 thermal turbulence 状态，必须考虑湍流。为此，我们首先介绍选择湍流直接模拟 (DNS) 的判断依据，之后按 DNS 的要求来设定选择模式的算法，并介绍我引入的一些新方法。在完成基本介绍后，讲述我在提高模式性能方面做的改进，最后给出模式的性能检验。

2.1 选择湍流直接模拟的理由及其技术要求

湍流的尺度谱很宽，对其完全分辨需要很高分辨率。为此，几十年来人们在模式分辨率有限的条件下设计了各种间接表征湍流的方法。随着计算机性能的提高，90 年代兴起了湍流直接模拟技术，它的控制方程组就是完整的 N-S 方程，力求模拟湍流所有细节。下表简要总结了 Versteeg 等人 (2010) 介绍的湍流计算方法：

表 2-1: 几种湍流模拟方法的比较

计算方法	基本原理	计算量和存储需求	方程复杂度	应用状况
雷诺平均 N-S 方程	采用湍流平均运动方程计算，用 $k-\epsilon$ 等湍流模型处理雷诺应力项。	中	高	在工业上有 30 余年应用历史
大涡模拟	在粗网格运动方程基础上，建立次网格湍流模型（类似参数化）来表征湍流	较大	高	在边界层气象学中应用广泛，在工业上复杂边值的处理仍有困难
湍流直接模拟	直接用 N-S 方程计算湍流的所有脉动，格距应小于 Kolmogorov 长度尺度	大	中	计算量太大，在工业上尚无法应用

考虑到我们研究的问题空间尺度在 $10^{-1}m$ ，时间尺度在 10^3s 以内，一般高性能计算系统可以满足水槽热对流湍流直接模拟（DNS）的需要。其次，由于我们研究的似乎湍流结构这类基础问题，应尽量直接分辨湍流精细结构。最后，DNS 的原理相对简单，物理过程完整，水槽模拟只需固壁边界或周期边界，仅并行计算编程有一定难度，适合本科生科研训练。

下面分别介绍 DNS 的分辨率要求以及 DNS 算法的设计原则。

2.2 旋转热对流数值模拟的空间分辨率要求

湍流直接模拟要求计算格距充分小，以清晰分辨湍流并正确刻画其能谱（Moin 等，1998）。一般要求格距小于 Kolmogorov 长度（Versteeg 等，2010），其定义为 N-S 方程中惯性力项和粘性项平衡时的长度尺度（Shishikina 等，2010）。

取速度尺度为:

$$u_r \sim (\varepsilon_u r)^{1/3} \quad (2.2.1)$$

其中 $\varepsilon_u(\bar{x}, t)$ 为局地动能耗散率:

$$\varepsilon_u(\bar{x}, t) = \frac{\nu}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial u_i(\bar{x}, t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\bar{x}, t)}{\partial x_i} \right)^2 \quad (2.2.2)$$

惯性力项尺度 $\sim \frac{u_r^2}{r}$, 粘性项尺度 $\sim \frac{\nu u_r}{r^2}$, 可得局地 Kolmogorov 长度:

$$\eta_K(\bar{x}, t) = (\nu^3 / \varepsilon_u(\bar{x}, t))^{1/4} \quad (2.2.3)$$

湍流热对流在边界附近存在 thermal boundary layer 和 kinetic boundary layer, Stevenes 等人 (2010) 用 Prandtl-Blasius 层流边界层理论给出了这两个边界层内湍流动能耗散率的下限, 并导出了与此对应的边界层附近 η_K 上限。由于边界层 η_K 小于水槽中部, 故模式在边界附近网格需要加密 (Shishikina 等, 2010), 加密程度取决于边界层内湍流强度和边界层高度。他还给出了 Raileigh-Benard 系统的 η_K 随 Pr 和 Ra 的变化的定量关系, 在 $Pr = 7.0$ (近于纯水) 的条件下给出 kinetic boundary layer 和 thermal boundary layer 内分别所需的最少格点数 N_{v-BL} 和 N_{th-BL} :

$$N = \frac{\delta}{\eta_K}, \quad \begin{cases} N_{v-BL} \approx 0.54 Ra^{0.18} \\ N_{th-BL} \approx 0.58 Ra^{0.13} \end{cases} \quad (2.2.4)$$

其中 δ 为边界层高度, 比较难确定。在有旋转时, Stevens (2010) 指出 kinetic boundary layer 会变薄。因此, 旋转热对流模拟的边界网格加密程度还需靠经验判断。

2.3 湍流直接模拟算法的设计原则

模式的设计原则是在保证模式稳定性、守恒性、迁移性的前提下搭建一个模块化的框架, 便于未来更复杂的方程求解器的嵌入, 同时考虑便于搭建 MPI 并行架构。首先, 我们介绍表征差分方程和微分方程关系的几种性质, 再比较有限差分法和有限体积法两种离散方法, 最后从分辨率要求出发确定算法的基本要

求。具体编程思路会在下一章同并行计算一同介绍。

2.3.1 差分方程的物理性质与数学性质

从数学上看，数值模拟的基本思路是通过用线性代数方法求解微分方程组离散出的差分方程。同一微分方程可以对应许多种差分格式，我们的核心目标是让数值解逼近精确解，即差分方程解能收敛于微分方程的解。Lax 等价定理条件十分苛刻，差分方程的稳定性和相容性往往只是收敛性的必要条件(陶文铨, 2011)。由于本模式控制方程组的相容性较容易满足，我们仅介绍数学性质中的稳定性。对于计算流体力学问题，我们更关注差分方程的物理性质，比较重要的有守恒性和迁移性。

(1) (初值) 稳定性

如果某一步施加的任何误差在计算过程中都不会被放大，则差分格式是稳定的[]。对于线性初值问题（比如线性平流方程），当边值不引入误差时，可采用 Von Neumann 方法（陶文铨, 2011）通过计算增幅因子来分析初值上的误差是否会放大，即初值稳定性。误差的传递满足什么规律？设差分方程的时间的一步推进可写为：

$$\bar{v}_{n+1} = A\bar{v}_n + f \quad (2.3.1)$$

如把 n 步格点值认为是初值，我们给初值引入误差 $\bar{\varepsilon}_n$ ，则方程变为：

$$\bar{v}_{n+1} + \bar{\varepsilon}_{n+1} = A(\bar{v}_n + \bar{\varepsilon}_n) + f \quad (2.3.2)$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1} = A\bar{\varepsilon}_n$$

这说明稳定性与变换矩阵 A 的性质关系密切，与 f 关系不大。这还说明误差的传递规律与差分方程解的演化规律是相近的，可以把误差作为差分方程初值来研究误差增长问题。

我们把误差通过 Fourier 变换表示成一团波的线性叠加：

$$f(x) = \sum_n c_n e^{ik\Delta x} \quad (2.3.3)$$

同时，定义增幅因子来表征误差的增长与否：

$$B = |f^{n+1}| / |f^n| \quad (2.3.4)$$

由此可知， B 只是 k 、 Δt 、 Δx 的函数。对于平流方程，往往可将时间和空间步长组合为 CFL 数 $c\Delta t / \Delta x$ 。在特定 CFL 数下，如果任意 k 对应的 B 均小于等于 1，则称差分格式为 Absolute stability (Lauritzen 等, 2011)。

Von Neumann 方法仅适用于线性初值问题，对更复杂的情形仅具有参考价值。一般而言，显式格式的稳定性要求 CFL 数小于 1，即最大时间步长受到空间步长的限制。这种分析方法还可拓展到椭圆型方程边值问题的迭代法中，用松弛系数 ω 代替时间步长 Δx ，可同理分析，后文会提到。

(2) 守恒性

如果原微分方程解在有限区域内的积分性质能转化为该区域内差分方程数值解的求和性质，则该差分格式是守恒的 (陶文铨, 2011)。积分范围可以是全场，比如正压原始方程模式中的全球总能量守恒；也可以是局部，如速度无辐散。研究对象除完整方程组的解外，还可以是简化方程的解，如平流过程中动量的全场积分守恒、涡度方程扭转项的全场积分守恒。

守恒型的差分格式以通量代替平流，它由积分形式的微分方程离散得到，有良好的积分性质，因而常能保证守恒性的，当时空步长足够小时与非守恒型的方程在数学上是等价的。用通量代替物理量本身的另一优点是当物理量空间上出现间断而通量连续时 (比如飞行器气动问题中的激波模拟 (Anderson, 2010)，大气中的锋面)，解方程时不会出现短波。

(3) 迁移性

在平流-扩散方程中，如果平流项差分格式可以使扰动仅向流动的下游传播，则称这一格式具有迁移性 (陶文铨, 2011)。反之，如果下游扰动向上游传播，则会形成振荡解。一阶迎风格式具有迁移性，中央差分格式不具有迁移性，后者会产生寄生波。我以一维平流方程为例说明空间中央差产生的寄生波：在空间范围 $[0,1]$ 内，周期边界条件，以速度 5 平流一个方波初始场，以时间步长 10^{-4} 前差分积分 100 步后发现不连续点的上游出现了振荡。对这种寄生波的另一解读为空

间中央差固有的相速误差-相速变得和波数有关，而方波的频谱又很宽。

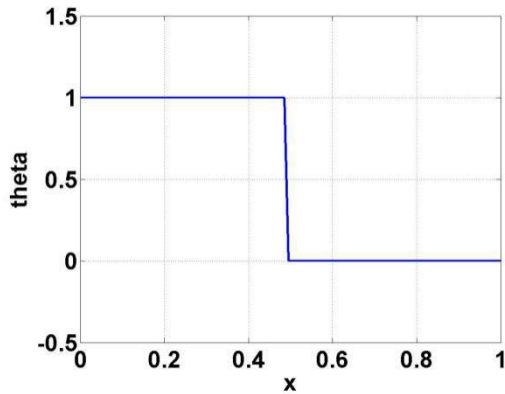


图 2-1a: 初始方波场

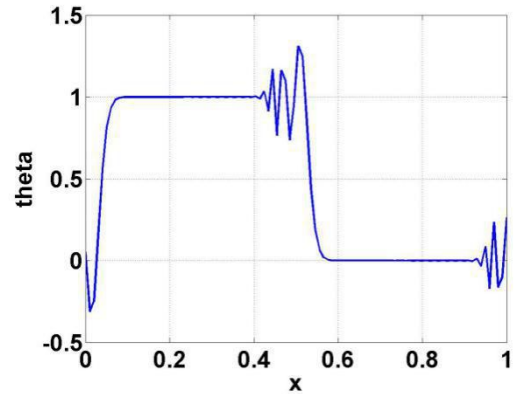


图 2-1b: 积分 100 步后

一般平流项采用带有高阶插值函数的 semi-Lagrangian 方法或高阶迎风格式可以在较好保证迁移性的同时取得较高计算精度。涡度-速度法中涡度方程和热流量方程的平流项需注意迁移性。

2.3.2 有限差分法和有限体积法

有限差分法 (finite-difference, 简称 FD) 指用差分来表示微分方程中的各阶导数的方法, 具体做法包括 Taylor 展开或多项式拟合 (陶文铨, 2011), 是最经典的 PDE 离散方法。

有限体积法 (finite-volume, 简称 FV) 指将守恒型控制方程在任意有限体积 (常选为格点支撑的最小方体) 内对时间和空间做重积分后, 用格点值近似表示面的通量值进行计算的方法 (陶文铨, 2011)。在操作上, 首先要用临近格点值构造小体元界面上该物理量函数值的插值方法, 这种插值方法相当于构造物理量的局部分布曲线, 称为型线。其次是选择计算插值函数 (型线) 在界面上的数值积分方法。最后整理成线性方程组后, 仍然是一个格点对应一个系数, 其解法和 FD 的类似。常用的型线有阶梯式分布 (左图) 和分段线性分布 (右图)。前者在 3D 问题中直接用格点值代表整个面上的值, 通量计算和面积分的运算次序可交换, 用得较多; 后者在 3D 时至少需 2 个格点来构造型线, 且积分和通量运算次序不可交换, 考虑了相邻格点的联系。另外, 不同项计算时可以选择不同的型线

而不必一致（陶文铨，2011）。

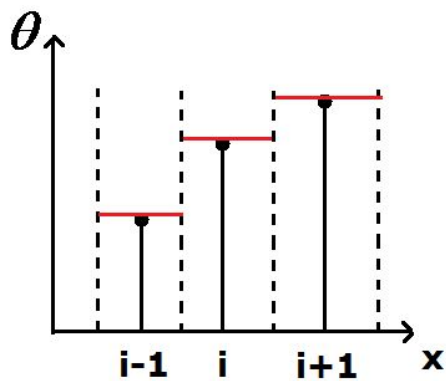


图 2-2a: 阶梯式分布

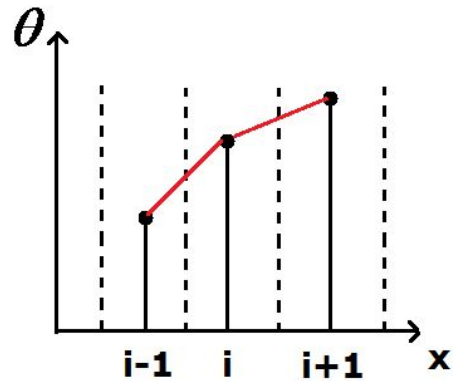


图 2-2b: 分段线性分布

重绘自陶文铨（2011）

FD 法的优点是便于分析各项乃至方程的截差等级这一数学性质以及它带来的物理性质-假扩散（采用二阶以下截差的公式计算一阶导数时，由于和原微分方程相比多了一个二阶导数项而导致的人为耗散作用），缺点是在非等距网格下守恒性难以保证；FV 法的优点是物理意义清晰，非等距网格下守恒性容易保证，缺点是截差较难分析。目前，FV 法在工程计算（Versteeg 等，2010）和地球流体模拟中受到较多青睐，如中科院大气所的 FAMIL 模式的动力框架（Zhou 等，2012）。

2.3.3 高分辨率模拟的计算要求

不同分辨率的模式往往选择不同的时间积分方案。本节要回答模式选择用显式、隐式还是其他格式？

DNS 要求时空分辨率都很高以分辨瞬变而微小的湍涡，这意味着较小的时间步长和空间格距。在时间步长方面，显式格式一般需满足 CFL 数 <1 的要求；隐式格式可以做到大步长积分，但往往对各种波长的波都有衰减作用。[]在权衡计算稳定性和有限网格误差后认为，显式格式是 DNS 的主要备选项，但对于因边界复杂需要网格在某些位置额外加密的情形（如 Moin 等，1998），几乎只能用隐式格式来提高计算效率（同时抑制一些在物理上不太感兴趣的短波）。

水槽热对流模拟的边界条件一般为长方体固壁边界，或在理想模拟中采用周期边界，边值比较简单，因此选择 DNS 是经济而高效的选择。

2.3.4 不可压 Boussinesq 流体 N-S 方程的涡量-速度形式

在流体的密度主要依赖于温度而非压强的情形下，流体的状态方程可写为：

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha T) \quad (2.3.3)$$

其中 α 为流体的热膨胀系数。利用这一近似，我们将不可压流体的 N-S 方程改写为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \alpha g T' \vec{k} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T &= \kappa \nabla^2 T \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

第一式为不可压连续方程，第二式为动量方程，第三式为热流量方程。动量方程中浮力由扰动温度给出， $T'(x, y, z) = T(x, y, z) - T_0$ 为扰动温度， T_0 为参考温度， p' 为扰动压强。 α 为热膨胀系数， g 为重力加速度， κ 为热扩散系数， ρ_0 为参考密度。5 个方程中共有 u, v, w, p', T 共 5 个未知量-3 个运动学量、2 个热力学量。流体运动归结为速度场、扰动压强场和温度场的相互作用。Boussinesq 近似实际上将压强分解为与动力有关的扰动压强 p' 和与浮力有关的两部分，前者贡献的压力梯度力成为有势力，和正压均质流体中压强扮演的协调运动的角色很像；后者成为驱动运动的源头-浮力。既然扰动压强只是运动的媒介，能否将其消去呢？

如果对动量方程取旋度，可将扰动压力梯度力消掉，只剩运动学量和温度，但现在出现了三个涡度分量。速度和涡度的联系有积分和微分形式两种：

积分形式有 Biot-Savart 定律（童秉刚等，2009）：

$$\vec{V} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{\omega} \times \vec{R}}{R} dV', \quad \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' \quad (2.3.5)$$

微分形式有矢量分析公式[], 计算时需要涡度和速度的边值:

$$\nabla^2 \vec{V} = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{V}) = -\nabla \times \vec{\omega} \quad (2.3.6)$$

两种方法都需要遍历所有格点。前者需要对全场求积分, 如 Jc 等 (1999) 的工作; 后者对应三分量的矢量泊松方程, 也需要全场信息来求解, 但[]指出由于许多高效泊松方程求解器的出现, 其速度一般会快些, 因而也是大多数研究者的选择 (Liu, 2001)。现在我们给出涡量-速度法的控制方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} &= (\vec{\omega} + \vec{k}f) \cdot \nabla \vec{u} + \nu \nabla^2 \vec{\omega} + \nabla \times (\vec{k}T) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla T &= \kappa \nabla^2 T \\ \nabla^2 \vec{V} &= -\nabla \times \vec{\omega} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

这一方法的特点是:

(1) 略去了扰动压强变量, 免除了压强边值设定的麻烦; 方程组直接展现了温度场和速度场的相互作用。

(2) 涡度输运方程和涡度-速度矢量泊松方程需要涡度边界条件。Lo 等人 (2005) 指出涡度边值需要由速度边值间接地给出, 即:

$$\vec{\omega}_b = \nabla \times \vec{V}_b \quad (2.3.8)$$

(3) 速度和涡度的无辐散条件必须在计算过程中得到保证, 这需要变量在网格上有特定的排布特点以及特定的算法, 后面会介绍。

(4) Speziale 等人 (1987) 指出, 这一方法的突出优点是处理非惯性参考系中的问题比较方便: 可以将非惯性系带来的科氏力 (但不包括离心力) 和加速度隐含在涡量初边值中, 不过他并未给出细节。我的理解是, 可以将方程组直接写在惯性系中, 直接向前积分绝对涡度 $\vec{\omega}_a$, 通过矢量泊松方程得到惯性系速度 \vec{V}_a , 随后用变换公式求出非惯性系中的速度和相对涡度:

$$\vec{V} = \vec{V}_a - \vec{\omega}_r \times \vec{r}, \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_a - \vec{\omega}_r \quad (2.3.9)$$

式中 $\vec{\omega}_r$ 为牵连涡度。实际上在数值天气预报中 (Lauritzen 等, 2011), 动量

方程中的科氏力计算带来的误差会在运动尺度大于 Rossby 变形半径时显著影响惯性重力外波的频散关系。大气、海洋和恒星大气都是旋转球面上的运动，目前尚未见到涡量-速度法在这些领域应用的报道，以后可以尝试。

2.4 涡量-速度方程组的守恒特性及非等距网格下守恒差分格式的构造

方程组最重要的守恒关系为涡度、速度的无辐散条件及其相互关系。其次，对于涡度方程还有涡度平流项的一次守恒、扭转项的一次守恒；对于热流量方程，还有温度平流过程的一次守恒。由于旋转热对流模拟要求边界网格加密，增加了网格不等距这一问题。现分别介绍其细节和对应的守恒差分格式，最后总结其相互联系。热流量方程由于相对独立，将不在本节介绍。

2.4.1 满足 Cauchy-Riemann 关系的矢量泊松方程差分格式

涡量-速度方程组中不显式地含有不可压条件以及“涡度时速度的旋度”这一事实，我们需要在泊松方程求解时同时满足 Cauchy-Riemann 关系（以下简称 C-R 关系）（Huang 等，1997）：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \nabla \times \vec{\omega} = \vec{V} \end{cases} \quad (2.4.1)$$

若采用非跳点网格，这一关系是无法直接满足的，Daube（1992）曾使用 influence matrix 方法来进行散度订正，比较麻烦。但若使用跳点网格，由于其差分格式与微分下的 C-R 关系是相容的，在确保边界处“涡度为速度的旋度”的条件下可以自动满足这一关系。这里“自动”是指无论方程具体求解过程如何，只要最终满足离散的泊松方程，就能满足 C-R 关系。

Huang(1997)对比了两种跳点网格，发现 MAC 网格（很像气象中的 Arakawa C 网格向三维的推广）能在不附加额外条件的情况下满足 C-R 关系，其变量分布如下图：

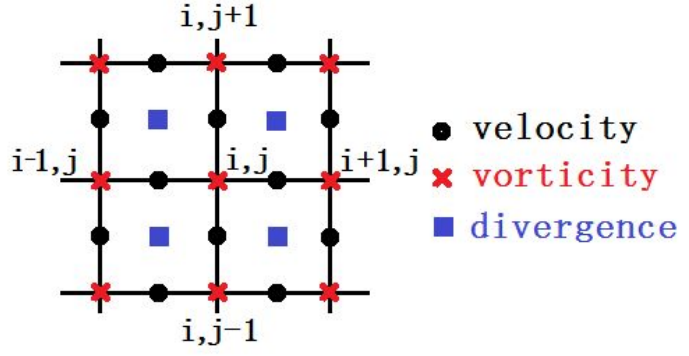
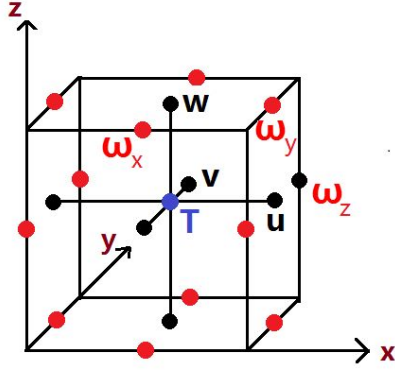


图 2-3a: MAC 网格变量分布立体图

图 2-3b: 二维 MAC 网格

他还以二维情形为例，证明了只要边界涡度正确地由速度给定，泊松方程的解自动满足 C-R 关系。对于三维情形，(Liu, 2005) 还指出需要涡度保持无辐散。我在此基础上，推导出了非等距网格下确保 C-R 关系的差分格式。

首先，我们以二维网格为例给出差分算子的定义：

$$\left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\right)_{i+1/2, j+1/2} = \frac{u_{i+1, j+1/2} - u_{i, j+1/2}}{x_{i+1} - x_i} \quad (2.4.2)$$

$$\left(\frac{\Delta_x^2 u}{\Delta x^2}\right)_{i, j+1/2} = \frac{\Delta}{\Delta x} (\Delta_x u) = \left(\frac{u_{i+1, j+1/2} - u_{i, j+1/2}}{x_{i+1} - x_i} - \frac{u_{i, j+1/2} - u_{i-1, j+1/2}}{x_i - x_{i-1}}\right) / (x_{i+1/2, j} - x_{i-1/2, j})$$

$$\left(\frac{\Delta_x^2 u}{\Delta x \Delta y}\right)_{i+1, j} = \frac{\Delta_y}{\Delta y} (\Delta_x u) = \frac{\Delta_x}{\Delta x} (\Delta_y u) = \left(\frac{u_{i+1, j+1/2} - u_{i, j+1/2}}{x_{i+1} - x_i} - \frac{u_{i, j-1/2} - u_{i-1, j-1/2}}{x_i - x_{i-1}}\right) / (y_{i, j+1/2} - y_{i, j-1/2})$$

这套算子有三个特点：

(1) 二阶非混合导的离散严格遵循了它由两次一阶导数运算构成。如果从 Taylor 展开来看，这个求二阶导的三点公式的误差为 $O(\max(\Delta x_i, \Delta x_{i+1}))$ ，并非三个点所能组合出的最高阶截差，但那种高阶截差的二阶导公式不能视为两次一阶导，导致 C-R 关系最终无法确保。

(2) 二阶混合偏导的离散满足“对易性”，即先对 x 求后对 y 求与先对 y 求后对 x 求结果是一样的。

(3) 该算子实际上对应着积分形式的矢量泊松方程（利用 Gauss 定理得

到):

$$\begin{cases} \oint_{\Gamma_u} \frac{\partial u}{\partial n} d\bar{S} = -\bar{i} \cdot \oint_{\Gamma} d\bar{S} \times \bar{\omega} \\ \oint_{\Gamma_v} \frac{\partial v}{\partial n} d\bar{S} = -\bar{j} \cdot \oint_{\Gamma} d\bar{S} \times \bar{\omega} \\ \oint_{\Gamma_w} \frac{\partial w}{\partial n} d\bar{S} = -\bar{k} \cdot \oint_{\Gamma} d\bar{S} \times \bar{\omega} \end{cases} \quad (2.4.3)$$

其中 Γ_u , Γ_v , Γ_w 分别是以 u, v, w 为中心的小方体的边界, 小方体各条棱都在已有网格线上。这与 Pascazio 等人 (1996) 在二维下导出的有限体积涡量-速度方程组有相似之处。

命题: 使用这套差分算子, 在 $\nabla \cdot \bar{\omega} = 0$ 和 $\bar{\omega}_b = \nabla \times \bar{V}_b$ 成立的条件下, 矢量泊松方程的数值解满足 $\nabla \cdot \bar{V} = 0$ 。

证明:

矢量泊松方程的数值解满足:

$$\begin{cases} \frac{\Delta_x^2 u}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_x^2 u}{\Delta y^2} + \frac{\Delta_x^2 u}{\Delta z^2} - \left(\frac{\Delta_y \omega_z}{\Delta y} - \frac{\Delta_z \omega_y}{\Delta z} \right) = 0 \\ \frac{\Delta_x^2 v}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_x^2 v}{\Delta y^2} + \frac{\Delta_x^2 v}{\Delta z^2} - \left(\frac{\Delta_z \omega_x}{\Delta z} - \frac{\Delta_x \omega_z}{\Delta x} \right) = 0 \\ \frac{\Delta_x^2 w}{\Delta x^2} + \frac{\Delta_x^2 w}{\Delta y^2} + \frac{\Delta_x^2 w}{\Delta z^2} - \left(\frac{\Delta_x \omega_y}{\Delta x} - \frac{\Delta_y \omega_x}{\Delta y} \right) = 0 \end{cases} \quad (2.4.4)$$

利用算子性质, 可化为:

$$\begin{cases} \frac{\Delta_x}{\Delta x} \tilde{D} - \frac{\Delta_y}{\Delta y} \left(\frac{\Delta_x v}{\Delta x} - \frac{\Delta_y u}{\Delta y} \right) - \frac{\Delta_z}{\Delta z} \left(\frac{\Delta_x w}{\Delta x} - \frac{\Delta_z u}{\Delta z} \right) + \left(\frac{\Delta_y \omega_z}{\Delta y} - \frac{\Delta_z \omega_y}{\Delta z} \right) = 0 \\ \frac{\Delta_y}{\Delta y} \tilde{D} + \frac{\Delta_x}{\Delta x} \left(\frac{\Delta_x v}{\Delta x} - \frac{\Delta_y u}{\Delta y} \right) - \frac{\Delta_z}{\Delta z} \left(\frac{\Delta_y w}{\Delta y} - \frac{\Delta_z v}{\Delta z} \right) + \left(\frac{\Delta_z \omega_x}{\Delta z} - \frac{\Delta_x \omega_z}{\Delta x} \right) = 0 \\ \frac{\Delta_z}{\Delta z} \tilde{D} - \frac{\Delta_x}{\Delta x} \left(\frac{\Delta_z u}{\Delta z} - \frac{\Delta_x w}{\Delta x} \right) + \frac{\Delta_y}{\Delta y} \left(\frac{\Delta_y w}{\Delta y} - \frac{\Delta_z v}{\Delta z} \right) + \left(\frac{\Delta_x \omega_y}{\Delta x} - \frac{\Delta_y \omega_x}{\Delta y} \right) = 0 \end{cases} \quad (2.4.5)$$

定义 $\tilde{\omega}_{z,i,j,k} = \left(\frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right)_{i,j,k} - \left(\frac{\Delta_y u}{\Delta y} \right)_{i,j,k}$ 为差分得到的“虚拟涡度”,

$$\text{定义 } \tilde{D}_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} = \left(\frac{\Delta_x u}{\Delta x}\right)_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} + \left(\frac{\Delta_y v}{\Delta y}\right)_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} + \left(\frac{\Delta_z w}{\Delta z}\right)_{i+1/2, j+1/2, k+1/2}$$

为差分得到的“虚拟散度”，上式可简写为：

$$\begin{cases} \frac{\Delta_x}{\Delta x} \tilde{D} - \frac{\Delta_y}{\Delta y} (\tilde{\omega}_z - \omega_z) + \frac{\Delta_z}{\Delta z} (\tilde{\omega}_y - \omega_y) = 0 \\ \frac{\Delta_y}{\Delta y} \tilde{D} + \frac{\Delta_x}{\Delta x} (\tilde{\omega}_z - \omega_z) - \frac{\Delta_z}{\Delta z} (\tilde{\omega}_x - \omega_x) = 0 \\ \frac{\Delta_z}{\Delta z} \tilde{D} - \frac{\Delta_x}{\Delta x} (\tilde{\omega}_y - \omega_y) + \frac{\Delta_y}{\Delta y} (\tilde{\omega}_x - \omega_x) = 0 \end{cases} \quad (2.4.6)$$

我们的目标是证明 $\tilde{D} = 0$ ，现在继续对上式求混合偏导，可得 3 组方程，现以其中一组为例说明后续步骤：

$$\begin{cases} \frac{\Delta_x}{\Delta x} \left(\frac{\Delta_y}{\Delta y} \tilde{D}\right) - \frac{\Delta_y^2}{\Delta y^2} (\tilde{\omega}_z - \omega_z) + \frac{\Delta_z}{\Delta z} \left[\frac{\Delta_y}{\Delta y} (\tilde{\omega}_y - \omega_y)\right] = 0 \\ \frac{\Delta_x}{\Delta x} \left(\frac{\Delta_y}{\Delta y} \tilde{D}\right) + \frac{\Delta_x^2}{\Delta x^2} (\tilde{\omega}_z - \omega_z) - \frac{\Delta_z}{\Delta z} \left[\frac{\Delta_x}{\Delta x} (\tilde{\omega}_x - \omega_x)\right] = 0 \end{cases} \quad (2.4.7)$$

两式相减得：

$$\frac{\Delta_x^2}{\Delta x^2} (\tilde{\omega}_z - \omega_z) + \frac{\Delta_y^2}{\Delta y^2} (\tilde{\omega}_z - \omega_z) - \frac{\Delta_z}{\Delta z} \left[\frac{\Delta_x}{\Delta x} (\tilde{\omega}_x - \omega_x) + \frac{\Delta_y}{\Delta y} (\tilde{\omega}_y - \omega_y)\right] = 0 \quad (2.4.8)$$

利用涡度无辐散条件：

$$\frac{\Delta_x}{\Delta x} (\tilde{\omega}_x - \omega_x) + \frac{\Delta_y}{\Delta y} (\tilde{\omega}_y - \omega_y) + \frac{\Delta_z}{\Delta z} (\tilde{\omega}_z - \omega_z) = 0 \quad (2.4.9)$$

上式可改写为一个 Laplace 方程：

$$\frac{\Delta_x^2}{\Delta x^2} (\tilde{\omega}_z - \omega_z) + \frac{\Delta_y^2}{\Delta y^2} (\tilde{\omega}_z - \omega_z) + \frac{\Delta_z^2}{\Delta z^2} (\tilde{\omega}_z - \omega_z) = 0 \quad (2.4.10)$$

涡度其他两个分量对应的 Laplace 方程可同理得到，出现一个以 $\tilde{\omega} - \bar{\omega}$ 为自变量的相互不耦合的矢量泊松方程：

$$\frac{\Delta_x^2}{\Delta x^2} (\tilde{\omega} - \bar{\omega}) + \frac{\Delta_y^2}{\Delta y^2} (\tilde{\omega} - \bar{\omega}) + \frac{\Delta_z^2}{\Delta z^2} (\tilde{\omega} - \bar{\omega}) = 0 \quad (2.4.11)$$

由于边界处速度的旋度等于涡度，故边界处 $\tilde{\omega}_b - \bar{\omega}_b = 0$ 。在这种边值下矢量

Laplace 方程只有平凡解（系数矩阵满秩的代数方程组在右端向量为零向量时仅有零解），因此在流体内部有：

$$\begin{aligned}\tilde{\omega} - \bar{\omega} &= 0 \\ \tilde{D} &= \text{const}\end{aligned}\tag{2.4.12}$$

这意味着作为泊松方程源项引入的涡度与速度的旋度相等，C-R 关系的第二式满足

在流体边界全部为固壁的情况下，流体没有净流入流出，

$$\oint_S \bar{V} d\bar{n} = \int_V \nabla \cdot \bar{V} dV = 0\tag{2.4.13}$$

对应离散形式为：

$$\sum_{\text{boundary}} \bar{V}_{i,j,k} \bar{n} = \sum_{i,j,k} \tilde{D}_{i,j,k} \Delta x_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} \Delta y_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} = \text{const} \times \text{Volume} = 0\tag{2.4.14}$$

这意味着 \tilde{D} 处处为 0，C-R 关系第二式也满足。证毕。

在迭代法的操作中，我们需要利用新得到的速度场对矢量泊松方程的涡度边界不断做更新，三个方程的边界耦合处理，内部不耦合，在迭代收敛后，即可得到近似满足 C-R 关系的解。根据我的经验，最好每迭代一步就更新涡度边界，可将散度降到可允许的范围。

2.4.2 满足涡度无辐散的差分格式

一般而言，我们会先计算涡度的输运方程，再由涡度反求速度。上小节介绍的满足 C-R 条件的差分格式成立的必要条件是涡度方程输出的涡度无辐散。为此，需要“两步走”：

(1) 涡度方程应满足局地的守恒条件（向前积分时不带来额外涡度的散度）：

$$\nabla \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} = 0\tag{2.4.15}$$

(2) Liu 等人 (2001) 指出可以由矢量泊松方程得到的速度场取旋度得到新的涡度场:

$$\tilde{\nabla} \times \vec{V}_{i,j,k} = \vec{\omega}_{i,j,k}, \quad \text{其中 } \tilde{\nabla} \times \text{ 为离散的旋度算子} \quad (2.4.16)$$

我们只讨论第一个条件, 即“涡度倾向”无辐散的条件。参考刘适达等人的介绍 (2011) 后, 我将方程各项表征为某些矢势的旋度:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{V}) = -\nabla \times (\nabla \times \vec{\omega}) + \nabla \times (\vec{k}T) \quad (2.4.17)$$

这里用到了两个矢量分析公式:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{V}) &= (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} + (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{\omega} - (\nabla \cdot \vec{\omega}) \vec{V} = (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{V} \\ \nabla^2 \vec{\omega} &= \nabla (\nabla \cdot \vec{\omega}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{\omega}) = -\nabla \times (\nabla \times \vec{\omega}) \end{aligned} \quad (2.4.18)$$

显然, 如果差分算子 $\tilde{\nabla} \times (\tilde{\nabla} \cdot)$ 作用于任何矢量网格函数的结果都为 0, $\nabla \cdot \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = 0$ 是满足的。易知, MAC 网格满足这一条件。

这对应于通量形式的平流、扭转项, 3 个分量方程展开可写为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_x}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega_x \vec{V}) &= \nabla \cdot (\vec{\omega}_a u) + \nabla \cdot (v \nabla \omega_x) + g \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega_y \vec{V}) &= \nabla \cdot (\vec{\omega}_a v) + \nabla \cdot (v \nabla \omega_y) - g \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega_z \vec{V}) &= \nabla \cdot (\vec{\omega}_a w) + \nabla \cdot (v \nabla \omega_z) \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

通量形式还联系着其他守恒性:

涡度通量有一次守恒特性:

$$\int_V \nabla(\omega_x \vec{V}) dV = 0, \quad \int_V \nabla(\omega_y \vec{V}) dV = 0, \quad \int_V \nabla(\omega_z \vec{V}) dV = 0 \quad (2.4.20)$$

涡管扭转过程也有:

$$\int_V \nabla(u \vec{\omega}_a) dV = 0, \quad \int_V \nabla(v \vec{\omega}_a) dV = 0, \quad \int_V \nabla(w \vec{\omega}_a) dV = 0 \quad (2.4.21)$$

MAC 网格自动满足这两类性质。

另一方面，涡度通量的一次守恒性等价于 Lagrangian 观点的输运过程守恒：

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt}\Big|_{transport} = 0 \quad (2.4.22)$$

这意味着，允许大时间步长积分的“vortex in cell”方法（Cottet 等，2003）（Mohammadian 等，2010）可以与通量形式的扭转项组合成满足涡度方程无辐散的差分格式。

最后，我们用 Gauss 定理给出该方程组的积分形式：

$$\begin{cases} \int_{V_{\omega_x}} \frac{\partial \omega_x}{\partial t} dV + \oint_{\Gamma_{\omega_x}} \omega_x \vec{V} d\vec{S} = \oint_{\Gamma_{\omega_x}} \bar{\omega} u d\vec{S} + \oint_{\Gamma_{\omega_x}} \nu \nabla \omega_x d\vec{S} + \int_{V_{\omega_x}} g \alpha \frac{\partial T}{\partial y} dV \\ \int_{V_{\omega_y}} \frac{\partial \omega_y}{\partial t} dV + \oint_{\Gamma_{\omega_y}} \omega_y \vec{V} d\vec{S} = \oint_{\Gamma_{\omega_y}} \bar{\omega} v d\vec{S} + \oint_{\Gamma_{\omega_y}} \nu \nabla \omega_y d\vec{S} - \int_{V_{\omega_y}} g \alpha \frac{\partial T}{\partial x} dV \\ \int_{V_{\omega_z}} \frac{\partial \omega_z}{\partial t} dV + \oint_{\Gamma_{\omega_z}} \omega_z \vec{V} d\vec{S} = \oint_{\Gamma_{\omega_z}} \bar{\omega} w d\vec{S} + \oint_{\Gamma_{\omega_z}} \nu \nabla \omega_z d\vec{S} \end{cases} \quad (2.4.23)$$

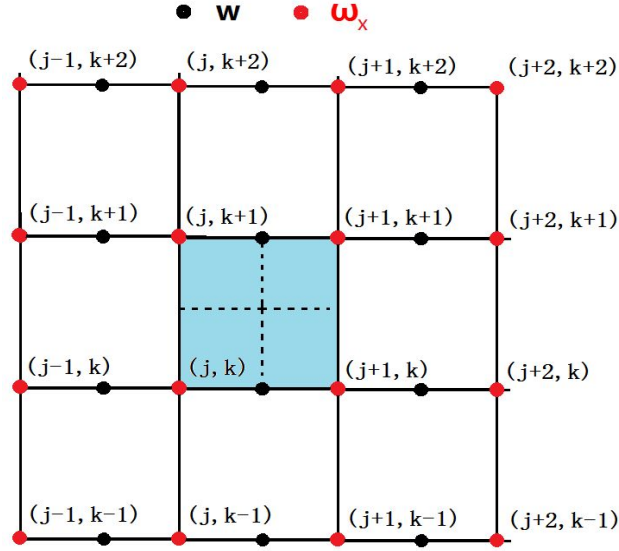
总而言之，涡度方程在 MAC 网络上选择通量格式可以保证涡度无辐散，矢量泊松方程在选取特定差分算子后可以进一步满足速度无辐散和“涡度是速度的旋度”这一定义，C-R 关系得到保证。这些满足守恒性的格式可以方便改为积分形式方程组，后者在复杂网络条件下将继承这些守恒性，而一般微分形式的方程组则很难做到。我们正在从有限差分法向有限体积法前进。

2.5 有限体积法中的扭转项计算方法

我们以 z 方向涡度方程的一个扭转项为例介绍计算的方法。下式给出了因 ω_x 向 z 方向扭转对 ω_z 的贡献：

$$\iiint_V \frac{\partial w \omega_{ax}}{\partial x} dydzdx = \left(\iint_2 w \omega_{ax} dydz - \iint_1 w \omega_{ax} dydz \right) \Delta x \quad (2.5.1)$$

我们仅取其中一个面积分来看。 w 和 ω_x 的分布如下图所示：



(2.5.2)

图 2-4: w 和 ω_x 的分布在面上的分布情况

阴影区为积分平面。数值二元定积分的精度取决于插值点数目和插值函数的构造方式。插值函数的阶数越高（不超过 4 阶否则有 Runge 现象），分段插值函数的连续性越好，扭转项的分布越光滑；然而，计算的“局地性”会下降，隐式格式的方程更麻烦，并行计算的通信开销会增加。

在与之等价的等距网格有限差分法中，(Lo 等人, 2005)先取将各变量插值到平面中点再求乘积来计算通量。在非等距网格中，即为分别用线性插值得到两个物理量在平面中点的值用以代表整个平面上的值，然后乘以平面的面积：

$$\begin{aligned}
 (w\omega_x)_{j+1/2,k+1/2} \Delta y \Delta z &= (w_{j+1/2,k+1} \frac{z_{k+1/2}-z_k}{z_{k+1}-z_k} + w_{j+1/2,k} \frac{z_{k+1}-z_{k+1/2}}{z_{k+1}-z_k}) / 2 \times \\
 &(\omega_{x,j,k} \frac{(z_{k+1}-z_{k+1/2})(y_{j+1}-y_{j+1/2})}{(z_{k+1}-z_k)(y_{j+1}-y_j)} + \omega_{x,j,k+1} \frac{(z_{k+1/2}-z_k)(y_{j+1}-y_{j+1/2})}{(z_{k+1}-z_k)(y_{j+1}-y_j)} \\
 &+ \omega_{x,j+1,k} \frac{(z_{k+1}-z_{k+1/2})(y_{j+1/2}-y_j)}{(z_{k+1}-z_k)(y_{j+1}-y_j)} + \omega_{x,j+1,k+1} \frac{(z_{k+1/2}-z_k)(y_{j+1/2}-y_j)}{(z_{k+1}-z_k)(y_{j+1}-y_j)}) / 4 \times \Delta y \Delta z
 \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

这一公式仅对 w 和 ω_x 在整个 $y-z$ 平面上不变时精确成立，未考虑 w 和 ω_x 各自变化特点对积分结果的差异。

在不引入更多格点的情形下，我们可以构造更高精度的公式以考虑 w 和 ω_x 的曲面特性：仍然用角上的 4 个 ω_x 做双线性插值，用棱上的两个 w 做线性插值，

相乘后出现了一个通量的多项式插值函数 $w\omega_x = f(y, z)$ ，然后用解析地计算其积分：

$$\iint w\omega_x dydz = \iint (a_1y + b_1z + c_1)(a_2y + c_2) dydz \quad (2.5.4)$$

在 $f(y, z)$ 的连续性方面，由于 w 沿 y 方向不连续，沿 z 方向一阶导不连续； ω_x 沿 y 和 z 方向一阶导不连续。因此，通量函数 $f(y, z)$ 沿 y 方向不连续，沿 z 方向一阶导不连续。 w 和 ω_x 的插值多项式阶数越高， $f(y, z)$ 就越光滑。

我们可以以此类推用高阶插值多项式建立更高精度的通量公式，在此不列举。实际上，这一思路额有限元方法中面积分的构造有些类似。在模式检验一章中，我们会介绍两种通量计算方法的效果比较；在模式展望一节中，会介绍这一思路在球面坐标上的优势。在附录中，会给出所有计算公式。

2.6 方程的无量纲化

方程无量纲化有诸多优点：

- (1) 可以清晰地通过控制旋转热对流的无量纲数判断各项量级；
- (2) 减少编程中的变量声明，增强程序可读性；
- (3) 可通过无量纲数调整方程的初边值条件和网格尺寸，比较方便；
- (4) 便于和其他研究者的结果作比较

在参考了 Julien (1996) 和王佳 (2012) 的工作后，我们建立如下变换关系：

定义无量纲长度 x' ，无量纲时间 t' ，无量纲速度 \vec{v}' ，无量纲温度 θ' ，无量纲涡度，无量纲地转涡度：

$$x = x'H, y = y'H, t = t'H^2 / \kappa, \vec{V} = \vec{v}'\kappa / H, T = (\bar{T} + \theta') / \Delta T, \bar{\omega} = \bar{\omega}'\kappa / H^2,$$

$$f = f'\kappa / H^2$$

使用的无量纲数有： $Ra = \frac{\alpha g \Delta T H^3}{\nu \kappa}$, $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$, $Ta = \left(\frac{fH^2}{\nu}\right)^2$, $\Gamma = \frac{L}{H}$

还有：

$$Ro = \left(\frac{Ra}{Pr Ta} \right)^{1/2}$$

我们注意到：

$$f' = \frac{fH^2}{\nu} \frac{\nu}{\kappa} = \sqrt{Ta} Pr$$

方程组可写为：

$$\left\{ \begin{aligned} \int_{V_{\omega_x}} \frac{\partial \omega_x'}{\partial t'} dV' + \oint_{\Gamma_{\omega_x}} \omega_x' \bar{V}' d\bar{S}' &= \oint_{\Gamma_{\omega_x}} (\bar{\omega}' + \sqrt{Ta} Pr) u' d\bar{S}' + Pr \oint_{\Gamma_{\omega_x}} \nabla' \omega_x' d\bar{S}' + Ra Pr \int_{V_{\omega_x}} \frac{\partial \theta'}{\partial y} dV' \\ \int_{V_{\omega_y}} \frac{\partial \omega_y'}{\partial t'} dV' + \oint_{\Gamma_{\omega_y}} \omega_y' \bar{V}' d\bar{S}' &= \oint_{\Gamma_{\omega_y}} (\bar{\omega}' + \sqrt{Ta} Pr) v' d\bar{S}' + Pr \oint_{\Gamma_{\omega_y}} \nabla' \omega_y' d\bar{S}' - Ra Pr \int_{V_{\omega_y}} \frac{\partial \theta'}{\partial x} dV' \\ \int_{V_{\omega_z}} \frac{\partial \omega_z'}{\partial t'} dV' + \oint_{\Gamma_{\omega_z}} \omega_z' \bar{V}' d\bar{S}' &= \oint_{\Gamma_{\omega_z}} (\bar{\omega}' + \sqrt{Ta} Pr) w' d\bar{S}' + Pr \oint_{\Gamma_{\omega_z}} \nabla' \omega_z' d\bar{S}' \\ \int_{V_T} \frac{\partial \theta'}{\partial t'} dV' + \oint_{\Gamma_T} \theta' \bar{V}' d\bar{S}' &= \oint_{\Gamma_T} \nabla' \theta' d\bar{S}' \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \oint_{\Gamma_u} \frac{\partial u'}{\partial n} d\bar{S}' &= -\bar{i} \cdot \oint_{\Gamma} d\bar{S}' \times \bar{\omega}' \\ \oint_{\Gamma_v} \frac{\partial v'}{\partial n} d\bar{S}' &= -\bar{j} \cdot \oint_{\Gamma} d\bar{S}' \times \bar{\omega}' \\ \oint_{\Gamma_w} \frac{\partial w'}{\partial n} d\bar{S}' &= -\bar{k} \cdot \oint_{\Gamma} d\bar{S}' \times \bar{\omega}' \end{aligned} \right. \quad (2.6.1)$$

由此可见， Ra 越大，斜压项作用越大； Ta 作用越大，旋转作用越大；为了降低方程复杂度，宽高比 Γ 未在其中出现。

2.7 模式计算方案

本节会正式介绍涡度方程空间差分格式、热流量方程空间差分格式、整体时间积分方案和矢量泊松方程的迭代方法。

2.7.1 涡度方程空间差分格式

(1) 涡度通量项

现以 x 方向涡度方程的垂直通量项为例来说明：

$$\iint_2 w \omega_x dx dy - \iint_1 w \omega_x dx dy \quad (2.7.1)$$

我们仿照 Lo 等人 (2005) 的方法, 利用黄色阴影矩形边角上的 4 个 w 点和 2 个 ω_x 点来近似计算通过绿色阴影矩形的通量。由于绿色平面上不太好构造 w 和 ω_x 的插值函数, 故暂且没有用扭转项的那种解析计算积分的方法。

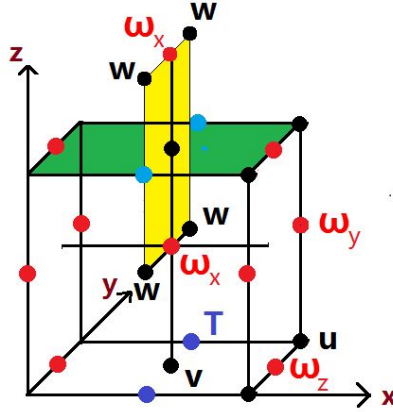


图 2-5: 涡度平流项计算方式示意图

(2) 涡度粘性项

仍以绿色面上的涡度粘性扩散通量为例:

$$\text{Pr} \iint_2 \frac{\partial \omega_x}{\partial n} dx dy \approx \text{Pr} \frac{\omega_{xi,j,k+1} - \omega_{xi,j,k-1}}{z_{k+1} - z_k} \Delta x \Delta y \quad (2.7.2)$$

(3) 斜压项

$$\begin{aligned} & Ra \text{Pr} \int_{V_{\omega_x}} \frac{\partial \theta'}{\partial y} dV' \\ & \approx Ra \text{Pr} \left[(\theta'_{i,j+1/2,k-1/2} \frac{z_k - z_{k-1/2}}{z_{k+1/2} - z_{k-1/2}} + \theta'_{i,j+1/2,k+1/2} \frac{z_{k+1/2} - z_k}{z_{k+1/2} - z_{k-1/2}}) \right. \\ & \left. - (\theta'_{i,j-1/2,k-1/2} \frac{z_k - z_{k-1/2}}{z_{k+1/2} - z_{k-1/2}} + \theta'_{i,j-1/2,k+1/2} \frac{z_{k+1/2} - z_k}{z_{k+1/2} - z_{k-1/2}}) \right] \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.7.3) \end{aligned}$$

(4) 扭转项

如前所述。

2.7.2 热流量方程的空间差分格式

热流量方程是典型的对流-扩散方程，我选用了 QUICK 格式（对流项二次迎风插值格式（Leonard, 1979）。对流-扩散方程的主流解法还有 semi-Lagrangian 方法，它同 QUICK 格式一样具有良好的迁移性，我们首先予以介绍再解释未采纳它的原因。

semi-Lagrangian 方法方法在气象海洋中有广泛应用，如我国 GRAPES 模式（黄博, 2014）。该方法采用 Lagrangian 观点对第 $n+1$ 步格点上的微团做后向轨迹追踪，通过迭代法确定其出发位置，并插值得到它在出发位置的值。一般将输运过程和扩散过程分开处理：假定微团在运动过程中所携带的物理量没有发生变化，到达格点后再计算扩散项。这一方法的优点是消除了线性稳定性判据，可以在 $cuorant$ 数大于 1 时做大步长积分，不过 Staniforth 等（1991）指出为保证寻找初始位置时迭代的收敛性，需要考虑风切变：

$$\Delta t < \max(|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}|) \quad (2.7.4)$$

semi-Lagrangian 方法的缺点是在步长较大时存在较强的数值耗散，一般认为出发点物理量值的插值函数阶数越高，数值耗散越小。由于 DNS 要求时间积分步长较小，该方法的优势难以发挥，故在这一领域应用较少。

QUICK 格式是一种针对平流项或通量项的具有守恒性、良好迁移性的高阶迎风格式[]。它的思路是通过主要在迎风方向选取三个点构造有限体积边界面上温度的二阶插值多项式来计算通量。我们仿照[]给出的等距网格下温度平流项的 QUICK 格式定义推导了非等距网格下温度通量形式的 QUICK 格式。

选定有限体积的形线位置在两相邻 θ 点之间的 MAC 网格面上，小体元的 x-y 面、y-z 面、x-z 面分别对应 u 、 v 、 w 所在面。现以 x 方向为例说明，“ w ”和“ e ”分别指小体元的左面（west）和右面（east）。

由[]，沿 x 方向平流项计算实质似乎温度梯度计算：

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_e = \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)_w = \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \quad (2.7.5)$$

沿 x 方向平流项分两种情况：

1) $u > 0$ ，下图左侧为上风方向，取 θ_{i-2} ， θ_{i-1} ， θ_i 三点插值得 θ_w 和 θ_e ：

$$\theta_w = \frac{(x_{i-1/2} - x_{i-1})(x_{i-1/2} - x_{i-2})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-2})} \theta_i + \frac{(x_{i-1/2} - x_i)(x_{i-1/2} - x_{i-2})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i-2})} \theta_{i-1} + \frac{(x_{i-1/2} - x_i)(x_{i-1/2} - x_{i-1})}{(x_{i-2} - x_i)(x_{i-2} - x_{i-1})} \theta_{i-2}$$

$$\theta_e = \frac{(x_{i+1/2} - x_i)(x_{i+1/2} - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} \theta_{i-1} + \frac{(x_{i+1/2} - x_{i-1})(x_{i+1/2} - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} \theta_i + \frac{(x_{i+1/2} - x_i)(x_{i+1/2} - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \theta_{i+1}$$

(2.7.5)

2) $u < 0$ ，下图右侧为上风方向，取 θ_{i-1} ， θ_i ， θ_{i+1} 三点 Lagrangian 插值得 θ_w ：

$$\theta_w = \frac{(x_{i-1/2} - x_i)(x_{i-1/2} - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} \theta_{i-1} + \frac{(x_{i-1/2} - x_{i-1})(x_{i-1/2} - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} \theta_i + \frac{(x_{i-1/2} - x_i)(x_{i-1/2} - x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i-1})} \theta_{i+1}$$

$$\theta_e = \frac{(x_{i+1/2} - x_{i+1})(x_{i+1/2} - x_{i+2})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})} \theta_i + \frac{(x_{i+1/2} - x_i)(x_{i+1/2} - x_{i+2})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})} \theta_{i+1} + \frac{(x_{i+1/2} - x_i)(x_{i+1/2} - x_{i+1})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})} \theta_{i+2}$$

很容易看到： $(\theta_w)_{i+1} = (\theta_e)_i$ ， $(\theta_w)_i = (\theta_e)_{i-1}$ ，沿 x 方向求和：

$$\sum_{i=1}^n (\theta_e)_i - (\theta_w)_i = (\theta_e)_n - (\theta_w)_1$$

(2.7.6)

这说明非等距网格下 QUICK 格式具有守恒性。不过由于 QUICK 仍采用了上游节点，迁移性没有完全保证，我在计算中发现仍有弱的数值频散发生。

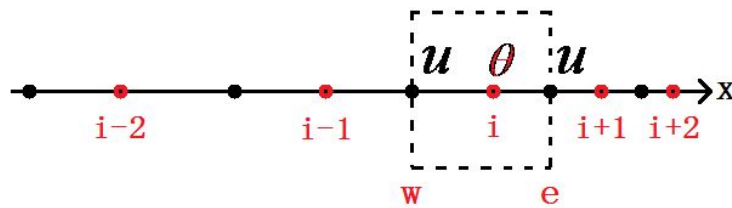


图 2-6: QUICK 格式的差分方法示意图

2.7.3 时间积分方案

我采用了 2 步的 Adams-Bashforth 格式（以下简称 A-B2 格式）（Lauritzen, 2011）来积分涡度方程和热流量方程。选择显式格式时要综合考虑计算精度、解的稳定性（包括增幅时的稳定性和降幅时的衰减性）、内存消耗等因素。

一般而言，时间层越多，由各层组合出的格式精度越高，但会成倍地占用内存以存放各层数组。2步 A-B 方法虽只有一个时间层，但其定积分由外推公式给出因而也用到了上一步的数据，同蛙跳格式一样具有二阶截差，但计算解的振幅更小。

2.7.3.1 A-B2 方法的数值特性

可以从一维平流方程中分离出了振荡方程，以此讨论时间积分方案 (Lauritzen, 2011):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.7.7)$$

设分离变数形式的 $u = \psi(t_n)e^{ikm\Delta x}$ ，得：

$$\frac{d\psi}{dt} + ikc\psi = 0 \quad (2.7.8)$$

我们将其抽象为振荡方程：

$$\frac{d\phi}{dt} = i\omega\phi \quad (2.7.9)$$

对应的 A-B2 格式差分方程为：

$$\phi_{n+1} = \phi_n + i\omega\Delta t \left[\frac{3}{2}F(\phi_n, t_n) - \frac{1}{2}F(\phi_{n-1}, t_{n-1}) \right] \quad (2.7.10)$$

设 $\phi_n = A^n = e^{i\omega n\Delta t}$ ，可得关于 A 的复数一元二次方程：

$$A^2 - \left(1 + \frac{3}{2}i\omega\Delta t\right) + \frac{1}{2}i\omega\Delta t = 0 \quad (2.7.11)$$

解为：

$$A_{\pm} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i\omega\Delta t \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}i\omega\Delta t\right)^2 - 2i\omega\Delta t} \quad (2.7.12)$$

以 $\omega\Delta t$ 为小量将其展开至保留三阶小量：

$$\begin{cases} A_+ = (1 - \frac{1}{2}\omega^2\Delta t^2 \dots) + i(\omega\Delta t + \frac{1}{4}\omega^3\Delta t^3 \dots) \\ A_- = (\frac{1}{2}\omega^2\Delta t^2 \dots) + i(\frac{1}{2}\omega\Delta t - \frac{1}{4}\omega^3\Delta t^3 \dots) \end{cases} \quad (2.7.13)$$

对 A_+ 取至 $(\omega\Delta t)^2$ ， A_- 取至 $\omega\Delta t$ ，可近似为：

$$\begin{cases} |A_+| = 1 + \frac{1}{8}(\omega\Delta t)^2 \\ |A_-| = \frac{1}{2}\omega\Delta t \end{cases} \quad (2.7.14)$$

我们可总结出一下特点：

(1) A_+ 对应的解实部绝对值远大于虚部，是方程的物理解； A_- 则虚部远大于实部，是计算解。

(2) 物理解的增幅因子 >1 ，说明在高频波情况下有弱的不稳定；计算解增幅因子 <1 ，始终会减弱，且在低频波情况下对物理解的影响很小。

(3) 两种解的振动相位有联系。我将计算解近似表示为物理解的共轭的函数：

$$A_- \approx \frac{1}{2}\omega\Delta t \cdot i \cdot (A_+)^* \quad (2.7.15)$$

假定物理解的振荡部分为 $(A_+)_o = e^{i\omega_o n\Delta t}$ ，则计算解的振荡部分可表示为：

$$(A_-)_o \sim ie^{-i\omega_o n\Delta t} \sim e^{i(3\pi/2 + \omega_o n\Delta t)} \quad (2.7.16)$$

说明计算解落后于物理解 $3\pi/2$ 个相位。

AB-2 格式的弱不稳定性限制了它的使用，但 Lo 等人（2005）在涡量-速度法的实践中发现这一方法仍可使用。3 步 Adams-Bashforth 格式 (Durrant 等, 1999) 在 $\omega\Delta t < 0.724$ 时能保证振荡方程的计算稳定，因而 Durrant 推荐在振荡问题中使用 AB-3 格式。

2.7.3.2 A-B2 方法 QUICK 格式的刚体平流测试

为了检验时间上采用 A-B2 方法、空间差分采用 QUICK 格式在非等距网格下的平流性能，我采用一个角速度处处相等的定常涡旋流场来输送一个热泡（关闭扩散项）。热泡定义为：

$$\Delta\theta \begin{cases} \theta_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\beta^{1/2}\right), \beta \leq 1 \\ 0, \beta > 1 \end{cases}, \quad \beta = \left(\frac{x-x_c}{x_r}\right)^2 + \left(\frac{y-y_c}{y_r}\right)^2 + \left(\frac{z-z_c}{z_r}\right)^2 \quad (2.7.17)$$

网格点数为 100^3 ，涡旋流场的角速度为 $\Omega = 1 \text{ rad/s}$ ，最大速度 $V_{\max} = 0.707 \text{ m/s}$ ，时间步长 $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$ ，最小格距 $\Delta x = 0.002 \text{ m}$ ，可算得 CFL 数，大致满足稳定性条件。

$$C = \frac{V_{\max} \Delta t}{\Delta x} = 0.3535 < 1 \quad (2.7.18)$$

程序运行了 8600 步，热泡在 $y=0.5$ 平面上被平流了 1.375 圈，即使在网格加密的边界附近，形态变化不大。左上图为初始温度场，左下图为过热泡沿 x 轴的线段上的温度分布；右上图为第 8600 步温度场，右下图为由同样方法获得的线段上温度分布。

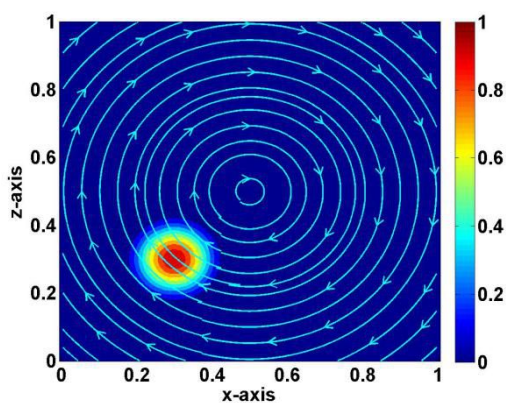


图 2-6a: 初始温度场

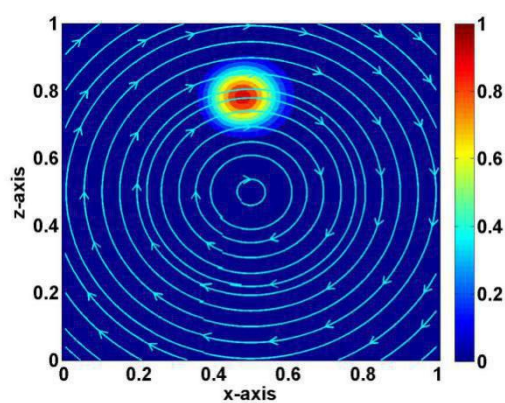


图 2-6a: 8600 步后温度场

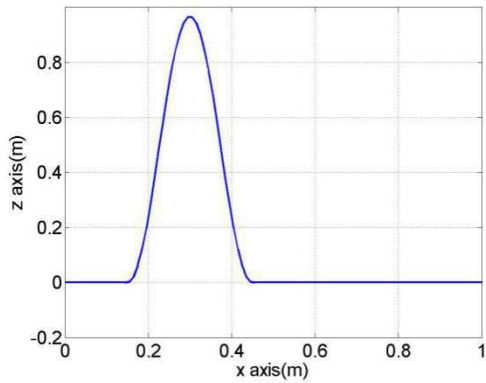


图 2-7a: 温度 x 方向廓线

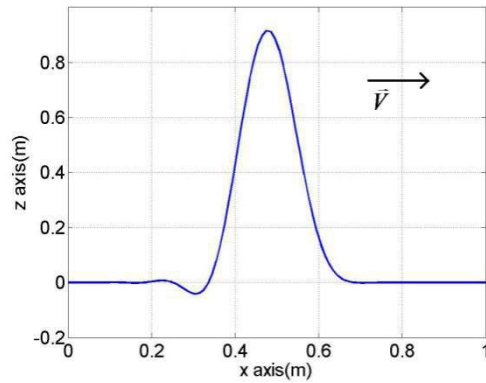


图 2-7b: 温度 x 方向廓线

我们看到计算 8600 步后热泡的后方出现了一个虚假的波谷；另一方面，热泡的最大温度有所下降。这两点说明，AB-2 时间积分 QUICK 格式仍有发生了微弱的数值频散，使用时需注意。

2.7.4 矢量泊松方程的数值解

矢量泊松方程的目的是用涡度求速度。由于是椭圆型方程，需要全场数据去求解，它是整个方程组积分过程中最费时的部分。前人采用过 False-transient 方法、GMRES、Korylov Subspace、非跳点网格的多重网格法等方法 (Lo 等, 2005) 求解这一矢量泊松方程。

我选择时的原则是编程简单、易于并行化。我首先采用了 weighted-Jacobi 迭代法 (Briggs 等, 2000)，随后添加了多重网格进行加速求解。根据前节所述，为使解满足 $C-R$ 条件，三个分量泊松方程的涡度边值要与速度协调。这一要求在迭代法中很容易实现，只需用每次迭代新得出的速度场更新涡度边值即可。首先，我们以计算 u 的方程为例给出其有限体积差分格式：

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{\omega_{z_i,j+1/2,k} - \omega_{z_i,j-1/2,k}}{y_{j+1/2} - y_{j-1/2}} - \frac{\omega_{y_i,j,k+1/2} - \omega_{y_i,j,k-1/2}}{z_{k+1/2} - z_{k-1/2}} \right) \\
& = \left(\frac{u_{i+1/2,j,k} - u_{i,j,k}}{x_{i+1} - x_i} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i-1/2,j,k}}{x_i - x_{i-1}} \right) (y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) (z_{k+1/2} - z_{k-1/2}) \\
& + \left(\frac{u_{i,j+1/2,k} - u_{i,j,k}}{y_{j+1} - y_j} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j-1/2,k}}{y_j - y_{j-1}} \right) (x_{i+1/2} - x_{i-1/2}) (z_{k+1/2} - z_{k-1/2}) \\
& + \left(\frac{u_{i,j,k+1/2} - u_{i,j,k}}{z_{k+1} - z_k} - \frac{u_{i,j,k} - u_{i,j,k-1/2}}{z_k - z_{k-1}} \right) (y_{j+1/2} - y_{j-1/2}) (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})
\end{aligned} \tag{2.7.19}$$

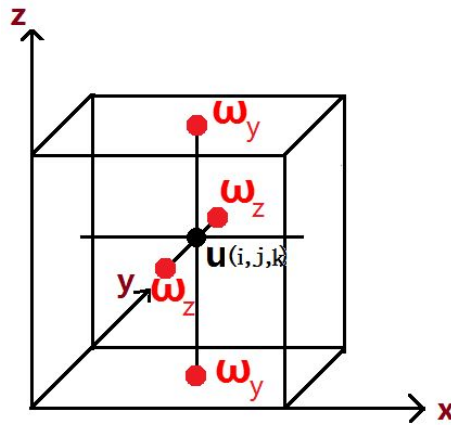


图 2-8: u 分量泊松方程的离散方式

2.7.5 多重网格 Weighted-Jacobi 迭代法

Jacobi 方法是最简单的迭代法之一，它具有编程简单、收敛性好和并行扩展性好的优点。Weighted-Jacobi 方法对它的改进，加速了短波的收敛性。近三十年发展起来的多重网格法是一种通用改良方法，通过在粗网格上加速长波的收敛来加速。我采用了权重系数为 $\omega = 2/3$ 的 Weighted-Jacobi 方法，叠加一层粗网格。

2.7.5.1 Weighted-Jacobi 方法

本节中我参考 Briggs 书中（2000）给出的思路，整理了 Weighted-Jacobi 迭代法的基本要点。对 Jacobi 迭代法的思路是在每一步迭代时，将某个格点上泊松

方程的残差归结为该点的误差，将原值和如此估计出的误差相加得到这一点的新值。

首先，给出 Jacobi 方法的迭代公式，我们以一维等距网格 Laplace 方程解为例说明。设 u 为方程精确解， A 为迭代矩阵，Laplace 方程对应的代数方程为：

$$Au = f$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \dots & \dots \dots \end{bmatrix} \quad (2.7.20)$$

$v^{(old)}$ 和 $v^{(new)}$ 分别为一次迭代过程中的原值和新值，它们分别满足方程：

$$\begin{cases} u = D^{-1}(L+U)u + D^{-1}f \\ v^{(new)} = D^{-1}(L+U)v^{(old)} + D^{-1}f = v^{(old)} + [(D^{-1}(L+U) - I)v^{(old)} + D^{-1}f] \end{cases}$$

Weighted-Jacobi 法的目的是加快短波的收敛速度。的思路是在给原值加上估计残差的过程中更凸显原值的作用，削弱“订正的强度”，实质是改变迭代不同波长的波校正作用权重与强度，其公式可由上式添加 ω 权重改写为：

$$\begin{aligned} v^{(new)} &= v^{(old)} + \omega[(D^{-1}(L+U) - I)v^{(old)} + D^{-1}f] \\ &= R_{\omega}v^{(old)} + \omega D^{-1}f \end{aligned} \quad (2.7.21)$$

其中：

$$\begin{aligned} R_{\omega} &= \omega D^{-1}(L+U) + (1-\omega)I \\ &= I - \omega D^{-1}A \end{aligned}$$

现在来求不同权重系数 ω 下不同波数的波的收敛速度。

定义误差为：

$$\begin{cases} e^{(new)} = u - v^{(new)} \\ e^{(old)} = u - v^{(old)} \end{cases} \quad (2.7.22)$$

误差演变满足的方程是：

$$e^{(new)} = R_{\omega}e^{(old)} \quad (2.7.23)$$

我们通过定义每步误差的增幅因子来定量刻画其收敛速度：

$$e^{(new)} = Ge^{(old)} \quad (2.7.24)$$

现在分别考虑不同波数的情形，于是要将迭代过程中的向量 v 可展开为

Fourier 级数:

$$\bar{v} = \sum_k c_k e^{ikn\Delta x} \quad (2.7.25)$$

$e^{ikn\Delta x}$ 为一个长度为格点数的列向量。这意味着各三角函数构成了解空间中的一组基底。

于是可定义各波数的增幅因子 G_k ，对各波数分别有:

$$e_k^{(new)} = G_k e_k^{(old)} \quad (2.7.26)$$

各波数误差仍满足:

$$e_k^{(new)} = R_\omega e_k^{(old)} \quad (2.7.27)$$

两式联立得:

$$(IG_k - R_\omega) e_k^{(old)} = 0 \quad (2.7.28)$$

该式表明 G_k 实质是迭代矩阵 R_ω 的特征值，计算之即可。我们尝试建立代数方程组系数矩阵 A 的特征值和 R_ω 的特征值的联系（两矩阵实际上有线性关系）。

$$\lambda_{R_\omega, k} P_{R_\omega, k} = (I - \omega D^{-1} A) R_\omega P_{R_\omega, k} \quad (2.7.29)$$

又考虑到:

$$D = \text{diag}(2) \quad (2.7.30)$$

整理得:

$$\frac{2}{\omega} (\lambda_{R_\omega} - 1) P_{R_\omega, k} = A P_{R_\omega, k} \quad (2.7.31)$$

即:

$$\lambda_{R_\omega, k} = 1 + \frac{\omega}{2} \lambda_{A, k} \quad (2.7.32)$$

问题转化为建立 $\lambda_{A, k}$ 和波数 k 的关系。实际上， $\lambda_{A, k}$ 就是齐次方程采用 Jacobi 迭代法的差分方程的增幅因子，这是因为:

$$\begin{aligned} \frac{v_{i-1} + v_{i+1} - 2v_i}{\Delta x^2} = 0, \quad u_i^{n+1} = u_{i-1}^n + u_{i+1}^n - 2u_i^n \\ Av_k^{(old)} = v_k^{(new)} = \lambda_{A, k} v_k^{(old)} \end{aligned} \quad (2.7.33)$$

先计算 $\lambda_{A, k}$ 。设波动解为 $u_i^n = B^n e^{lik\Delta x}$

$$\lambda_{A_k} = B = e^{ik\Delta x} + e^{-ik\Delta x} - 2 = 2 \cos k\Delta x - 2 = -4 \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \quad (2.7.34)$$

可得 Weighted-Jacobi 方法各波数的增幅因子，并作图如下：

$$\lambda_{R_{\omega,k}} = 1 - 2\omega \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \quad (2.7.35)$$

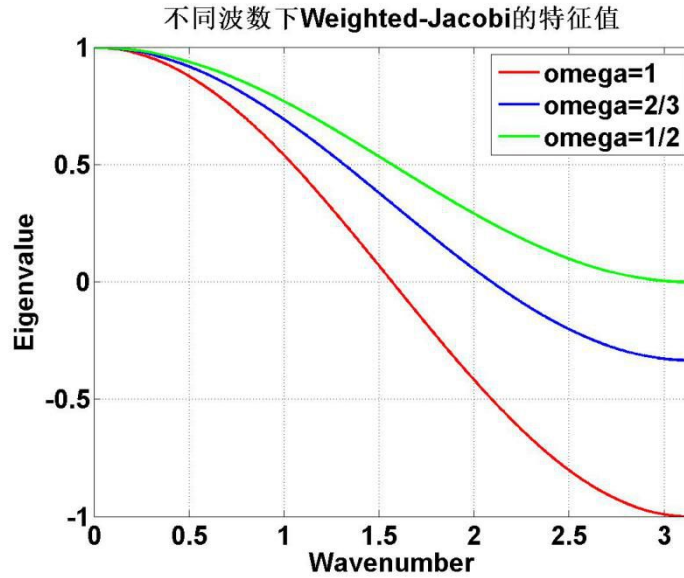


图 2-9: 几种松弛因子对应增幅因子（特征值）随波数变化
重绘自 Briggs 等（2000）

如何选取选取 ω 才能加速整体收敛呢？图中展现了波长从 $2\Delta x$ 到 ∞ 对应的特征值（增幅因子），可发现各种 ω 对长波的改变都很小，说明 Weighted-Jacobi 方法长波的收敛是最慢的；对于短波，曲线越是接近于 0，其收敛得越快。直观上，这对应着令中等波数 $k_m = \frac{2\pi}{\Delta x}$ 和大波数 $k_l = \frac{2\pi}{2\Delta x}$ 收敛速度相等（特征值互为相反数）：

$$\lambda_{R_{\omega,k_m}} = -\lambda_{R_{\omega,k_l}}, \quad 1 - 2\omega \sin^2 \frac{k_m \Delta x}{2} = -(1 - 2\omega \sin^2 \frac{k_l \Delta x}{2}) \quad (2.7.36)$$

这对应 $\omega = 2/3$ ，因此我们就选取这一权重系数。

等距网格下 Jacobi 迭代法还具有保持速度无辐散的特性。实际上，无论是否为非等距网格，Laplace 算子不会引入额外散度，即下式中的 B 不会引入额

外散度，但 D^{-1} 在非等距网格时会引入散度而在等距网格时不会。因此，非等距网格时 Jacobi 迭代法的散度是随着误差缓慢接近 0 的，这可能是一个缺陷。

$$\begin{aligned} v^{(new)} &= v^{(old)} + \Omega \\ \Omega &= D^{-1} \omega [((L+U) - I)v^{(old)} + f] = D^{-1} B \end{aligned} \quad (2.7.37)$$

2.7.5.2 多重网格法

单纯用 Jacobi 迭代法收敛速度是很慢的，为了提速我们引入多重网格法。我们首先介绍多重网格法基本原理，然后讨论它在 MAC 网格下矢量泊松方程组的实现方案并比较了优劣。

1. 多重网格法基本原理

在代数方程组的数值计算中，波的“长短”由一个完整波形跨越几个格距来衡量。细网格上的长波在粗网格上就成了较短的波，细网格上的短波在粗网格上可能因无法表示而产生混淆误差。因此，在细网格上残差足够平滑的条件下，如果能将细网格上的残差倒到粗网格上平滑掉长波分量再倒回来，粗网格甚至还能套更粗的网格，便可大幅加速收敛，即多重网格法的思路（Briggs 等，2000）。

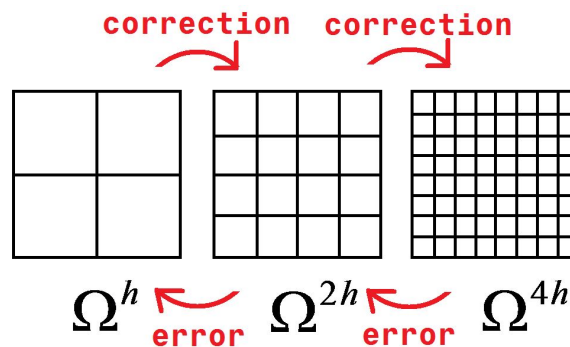


图 2-10: 多重网格法示意图

在具体操作上，要给粗从细网格到粗网格变换的“限定算子” (restriction operator) I_{2h}^h 和 I_h^{2h} 从粗网格到细网格的“延拓算子” (prolongation operator)，以及

几重网格间转换的策略，如“V-cycle”、“W-cycle”等。我们采用了最简单的 V-cycle 迭代策略，设代数方程组为 $Au = f$ ，介绍如下：

(1) 在第 k 重细网格 Ω^{kh} 上粗略求解 $A^{kh}u^{kh} = r^{kh}$ 得到解的估计 v^{kh} ，用它计算余量

$$r^{kh} = A^{kh}v^{kh} - f^{kh}, \text{ 得到残差 } e^{kh} = u - v^{kh} \text{ 满足的方程 } Ae^{kh} = r^{kh};$$

(2) 为了在粗网格上计算残差，将余量延拓到粗网格上： $I_{kh}^{(k-1)h}r^{kh} = r^{(k-1)h}$ ；

(3) 在粗网格上估计残差，求解 $A^{(k-1)h}e^{(k-1)h} = r^{(k-1)h}$ 得到残差的估计值 $e^{(k-1)h'}$ ，再计算余量 $r^{(k-1)h''} = A^{(k-1)h}e^{(k-1)h'} - r^{(k-1)h}$ ，得到粗网格残差 $e^{(k-1)h''} = e^{(k-1)h} - e^{(k-1)h'}$ 。

(4) 重复 (2) (3) 步 k 次至最粗网格，可以开始递归地计算校正后的残差；

(5) 在最粗网格上直接得到 $A^he^h = r^h$ 解的估计值 $e^{h'}$ ，用限定算子将其内插到较细网格上： $I_h^{2h}e^{h'} = e^{2h^*}$

(6) 在较细网格上校正残差： $e^{2h^{**}} = e^{2h^*} + e^{h'}$ ；

(7) 重复 (4) (5) k 次至最细网格。

(8) 计算 $v^{kh''} = v^{kh} + e^{kh^{**}}$ ，完成一次迭代过程

(9) 判断误差是否降低到误差限内，否则继续执行

对于多重网格法在本模式中的应用，我们需要考虑的问题是：

- (1) 粗网格网格变量如何分布？
- (2) 限定和延拓算子如何选取？
- (3) 一次 V-cycle 中，需分别在粗网格和细网格上迭代多少步？
- (4) 对于矢量泊松方程，三个分量方程的迭代次数必须相同吗？

2. 粗网格方程组及其离散方式

粗网格方程组的用处是通过上一步（第 n 步）迭代值贡献的部分源项与真实源项之差作为新的源项，计算迭代值的修正量并插值到细网格后，校正细网格的迭代值。我们将细网格方程组分解为第 n 步迭代值 \bar{v}^n 和修正量 \bar{v}_e ：

$$\nabla^2 \bar{v} = \nabla^2 \bar{v}^n + \nabla^2 \bar{v}_e = -\nabla \times \bar{\omega}, \Leftrightarrow \nabla^2 \bar{v}_e = -(\nabla \times \bar{\omega} + \nabla^2 \bar{v}^n) \quad (2.7.37)$$

假定 \bar{v}^n 无辐散， $\nabla^2 \bar{v}^n$ 便可写为旋度形式，定义 $\bar{\omega}'$ ，满足：

$$\nabla^2 \bar{v}^n = -\nabla \times \bar{\omega}' \quad (2.7.38)$$

进而得到粗网格上关于 \bar{v}_e 的矢量泊松方程组以及校正关系：

$$\begin{aligned} \nabla^2 \bar{v}_e &= -\nabla \times (\bar{\omega} - \bar{\omega}') = -\nabla \times \bar{\Omega} \\ \bar{v}^{n+1} &= \bar{v}^n + \bar{v}_e \end{aligned} \quad (2.7.39)$$

为了保证 \bar{v}^{n+1} 也无辐散，需保证 \bar{v}_e^n 在细网格上无辐散，这意味着粗网格方程组数值解也应满足 Cauchy-Riemann 关系：

$$\tilde{\nabla} \times \bar{v}_e = \bar{\Omega}, \quad \tilde{\nabla} \cdot \bar{v}_e = 0 \quad (2.7.40)$$

考虑到粗网格矢量泊松方程组与细网格结构相似，解的要求相似，宜仍采用 MAC 网格并仍可用 Weighted-Jacobi 方法解。定义一个“MAC 方体”为以 θ 为中心的最小方体，我选取 4 个细网格上的“MAC 方体”为 1 个粗网格上的“MAC 方体”。这套网格系统有类似“自相似”的特性，其带来的诸多便利会在后文提到。粗网格上的速度和涡度格点位置均不予细网格上的相应格点重合，示意图如下：

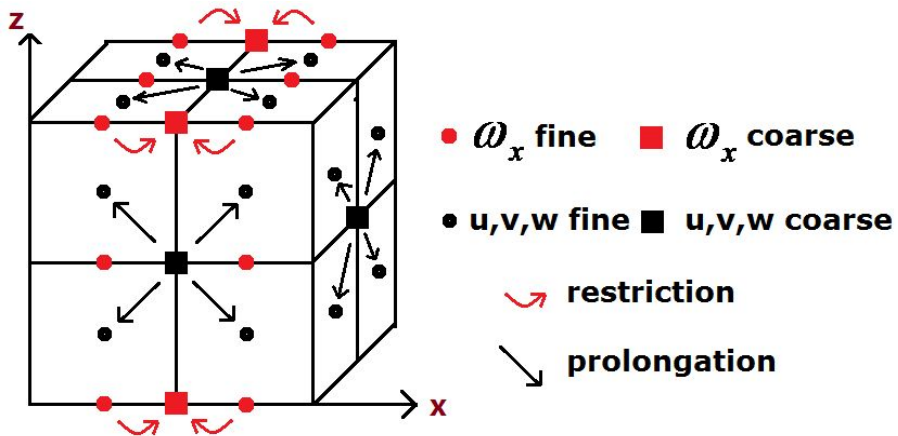


图 2-11：粗网格格点分布及延拓算子、限定算子示意图

3. 限定算子和延拓算子

操作时，我们只需将 $\bar{\omega} - \bar{\omega}'$ 限定到粗网格上， \bar{v}_e 延拓到细网格上。如果粗网格采用 MAC 网格， \bar{v}_e 在粗网格上可以无辐散，还要求延拓过程不为 \bar{v}_e 引入额外的散度、限定过程不为 $\bar{\omega} - \bar{\omega}'$ 引入额外的散度。其次，才要考虑精度的问题。为方便讲解，我先介绍延拓算子再介绍限定算子。

(1) 延拓算子

能保持速度守恒性的延拓算子应该是“局地的”，下面通过一个反例来说明。计算某细网格速度格点上校正量的比较直观而准确方法时用相邻四个粗网格格点做双线性插值，但双线性插值算子会引入额外散度，现证明如下：

命题：MAC 网格下双线性插值算子作用后的无辐散离散速度矢量场散度可以不为 0，

其中 u 分量横坐标编号为奇数的点的双线性插值算子定义为：

$$\tilde{L}_{1i,j,k} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_{j+1} - y_j}{y_{j+1} - y_{j-1}} & \frac{y_j - y_{j-1}}{y_{j+1} - y_{j-1}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1} - z_{k-1}} \\ \frac{z_k - z_{k-1}}{z_{k+1} - z_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (2.7.41)$$

横坐标为偶数点由奇数点线性插值得到。

v, w 分量以此类推。散度算子定义为：

$$\text{div}_{i,j,k}(\vec{V}) = \frac{u_{i+1/2,j,k} - u_{i-1/2,j,k}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} + \frac{v_{i,j+1/2,k} - v_{i,j-1/2,k}}{y_{j+1/2} - y_{j-1/2}} + \frac{w_{i,j,k+1/2} - w_{i,j,k-1/2}}{z_{k+1/2} - z_{k-1/2}} \quad (2.7.42)$$

证明：

$\tilde{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$ 是一种局地守恒性，仅涉及三对共 6 个相邻的 u, v, w 格点，同在一个“MAC 方体”中。细网格上计算散度相关的任何三对格点必然也在同一个粗网格“MAC 方体”内。一个细网格 MAC 方体内的 6 个细网格点会由 24 个不同的粗网格点插值得到。由散度守恒的局地性知，细网格无辐散的必要条件是为它们插值的粗网格点都在一个粗网格“MAC 方体”内。然而，一个粗网格“MAC

方体”内只有6个不同的点，因而这种双线性插值方法必然会用到其他“MAC方体”内的点，细网格上散度的局地守恒性无法保证，证毕。

我的限定算子设计思路是从散度的积分定义-每个“MAC方体”内质量无源无汇入手，努力使待插值细网格点能保持粗网格点的这一性质。假定“细网格上的变量分布和粗网格是相似的”，即两种网格上各面的质量通量仅有规模的差异，粗网格“MAC方体”是细网格“MAC方体”的“缩小版”。可以取一个粗网格“MAC方体”表面上的所有细网格速度格点值取为该方体表面上的粗网格值，而不在粗网格“MAC方体”表面的细网格点直接由在它表面的细网格点线性插值得到，如上图所示。

(2) 限定算子

粗网格上速度无辐散的必要条件是涡度“无辐散”。涡度格点定义在方体的棱上，我采用最简单的方法：取粗网格“MAC方体”上某条棱上的细网格值直接线性插值得到该棱上的粗网格值，不会引入额外散度。

另外，这种“局地化”的限定/延拓算子在MPI并行计算时不会引入额外通信开销。

4. 其他参数的选取及算例

尚未确定的参数包括：粗网格重数、每重网格上的平滑次数。我们分等距网格和非等距网格分别探讨。

我进行了一次条件比较苛刻的热泡数值试验。在 $Ra = 10^8$ ， $Pr = 7.1$ ， $Ta = 0$ 的静止流体中，在计算区域底部的中央放置了一个钟形热泡，它满足的方程同QUICK格式刚体平流检验中的形式。

其中 $\theta_0 = 0.3$ 为扰动温度幅度。初始温度场和它引发流动的示意图如下：

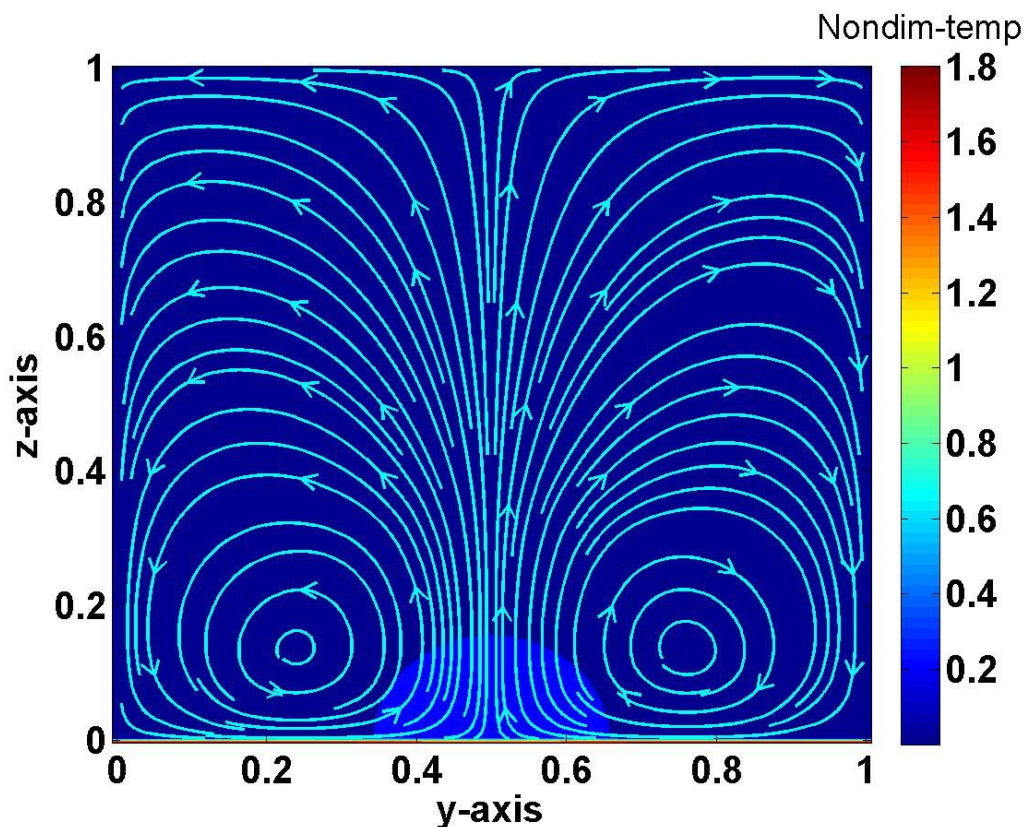


图 2-12: 热泡及它引发的流场

我选取 2 种由粗到细的格点数: 40^3 、 80^3 、 120^3 、 160^3 , 以及 3 种方案: 无多重网格、1 重网格、3 重网格。考察了它们的收敛速度。我定义误差为内点两次迭代之差的几何平均数:

$$e = \sqrt{\sum_{i,j,k} (u^{n+1} - u^n)^2 + (v^{n+1} - v^n)^2 + (w^{n+1} - w^n)^2} \quad (2.7.43)$$

设定 40^3 误差限为 10^{-4} , 其他为 10^{-2} 。

(1) 等距网格试验

在每轮迭代中, 三个速度分量方程在最细网格上迭代 12 次; 在各层粗网格上估计残差, 迭代 40 次。试验结果表明, 本方案下粗网格能有效加速收敛, 3 重网格加速效果优于 1 重网格, 误差均随时间“折半”下降。在 4 种由粗到细分辨率下, 3 重网格的总体收敛速度(反比于总时长)分别可达无多重网格时的 24.4 倍、55.5 倍、54.2 倍和 56.6 倍。

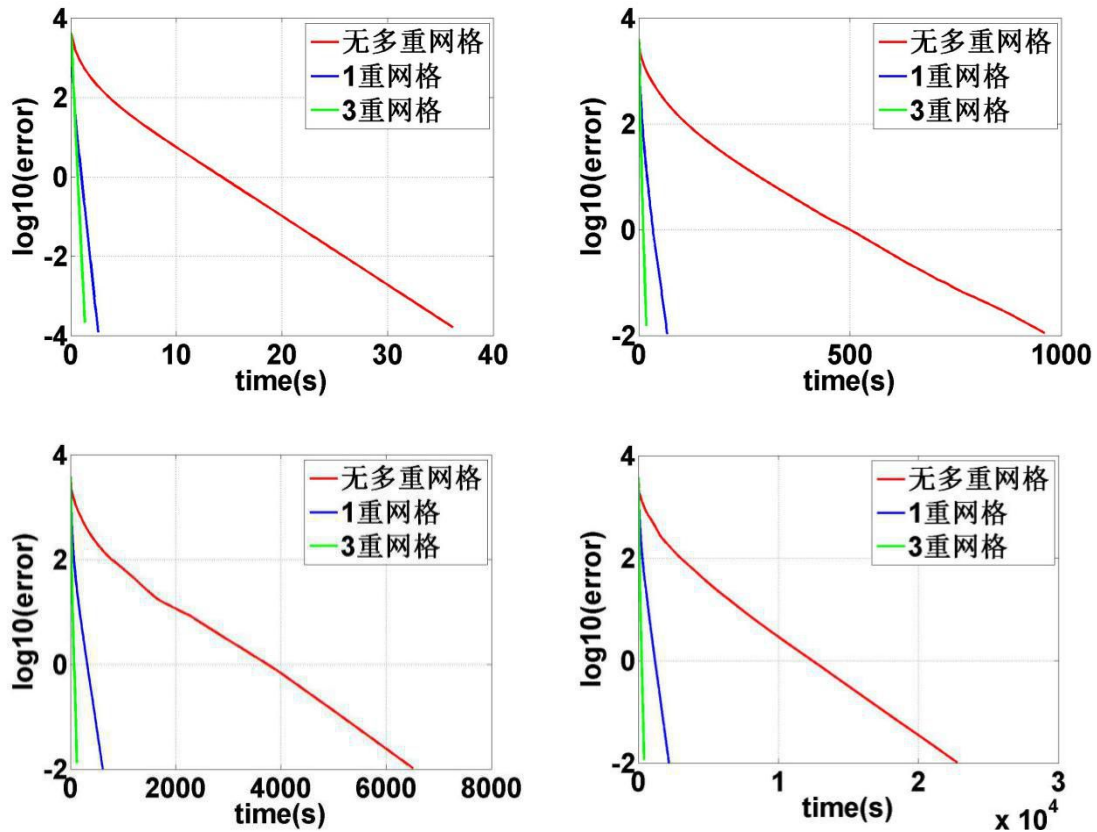


图 2-13: 等距网格, 不同格点数时误差的下降速度:

40³ (左上)、80³ (右上)、120³ (左下)、160³ (右下)

(2) 非等距网格试验

非等距网格的收敛速度比等距网格慢许多, 因此我们将 Ra 下调至 10^6 , 采用和等距网格相同的迭代次数。我只给出了 40³ 和 80³ 测试结果, 分辨率更高时结果相似。用多重网格时, 误差在初期会以和等距网格一样的“折半”速度下降, 随后误差降速变得非常缓慢, 低于无多重网格的情形。当误差限不很大时, 多重网格会带来减速, 1重网格收敛速度略低于3重网格。同时, 不论是否有多重网格, 散度难以降到很小, 在 80³ 时为 10^5 量级, 是 Weighted-Jacobi 在非等距网格时固有的问题 (见 2.6.5.1 节) 而与多重网格无关。

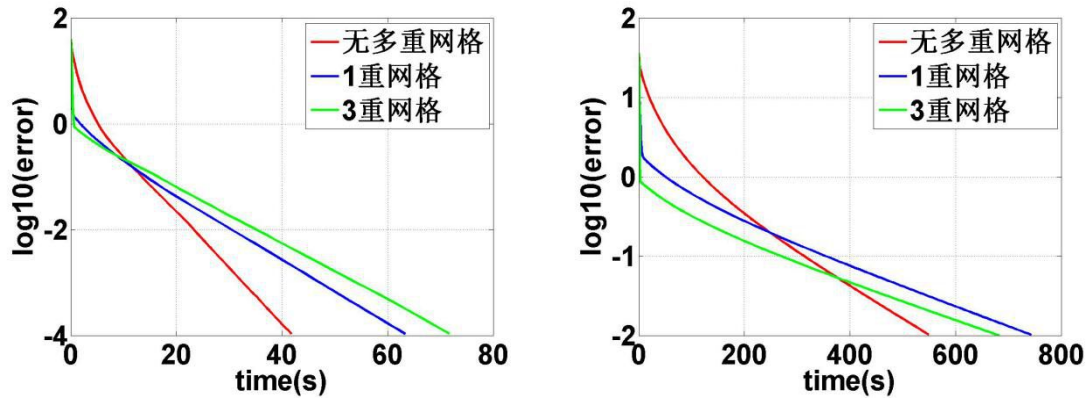


图 2-14: 非等距网格, 不同格点数时误差的下降速度:
 40^3 (左上)、 80^3 (右上)

(3) 非等距网格加速收敛的改进策略

我注意到在非等距网格误差速降终止时, 粗网格误差下降也出现瓶颈, 那么适当增强粗网格上的平滑能否推迟“瓶颈”的到来? 我将 1 重及以上网格的粗细交替迭代次数提高为之前的 70 倍 (以下称“强化迭代”), 发现误差能维持“折半”速度更多的步数, 但之后误差下降仍然遇到瓶颈, 而且由于迭代强度更大而会浪费更长时间。为了同时“强化迭代”在大误差时的优势和“非强化迭代”在小误差时的优势, 我令粗网格上步误差和这步误差之商小于 1.2 为“多重网格加速无效”的判据, 一旦“加速无效”时刻到来, 即立刻取消多重网格。我在 80^3 下针对 1 重网格和 3 重网格做了测试, 发现 1 重网格时能加速到无多重网格时的 2.84 倍, 3 重网格时能加速到 4.04 倍, 较好地改善了多重网格法在非等距网格时的问题。

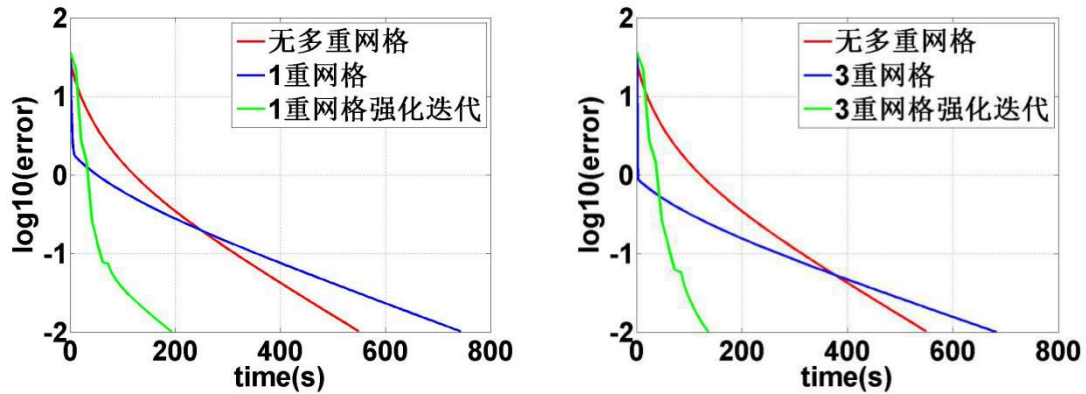


图 2-15: 非等距网格, 不同格点数时误差的下降速度 (改进后):
 40^3 (左上)、 80^3 (右上)

2.8 非等距网格生成、初始条件和边界条件

本节介绍热对流模拟时的这三个技术细节。它们的设定取决于具体物理问题，本节以旋转热对流为例进行说明。

2.8.1 非等距网格

如前所述，热对流模拟需要对边界进行加密。为此，我采用简单的直角坐标系，在水平方向格点等距分布，垂直方向的格距遵从正态分布函数的某一段：

$$\Delta z(z) = A \exp\left(-\frac{(z-H/2)^2}{2\sigma^2}\right), z \in [0,1], \int_0^1 \Delta z(z) dz = 1 \quad (2.8.1)$$

其中 A 为系数。有两个参数可调节曲线加密程度：

(1) 截取正态分布的哪一段，可通过 n 调节分布函数范围 $[-n\sigma, n\sigma]$ 。 n 越大，边界附近网格越密、中央网格越疏，在 $n \gg 1$ 后那里相邻格距差异会较小。

(2) 标准差 σ ， σ 越大边界网格加密变中央疏，效果类似 n 。

一般而言，边界加密越强，整个模式的积分步长要减小，矢量泊松方程越难收敛。在模式调试阶段，我选取加密程度适中的 $n=1$ ， $\sigma=0.707$ ，在未来会考虑 Ra 和 Pr ，在边界层内放置足够多的格点。

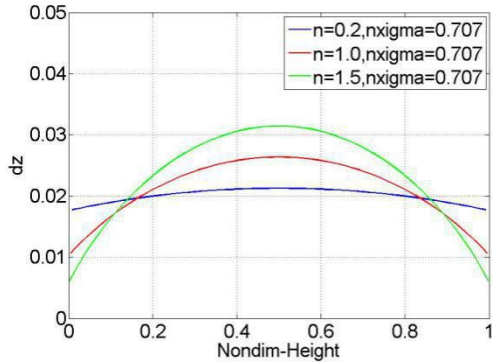


图 2-16a: 格距随高度分布 (n 不同)

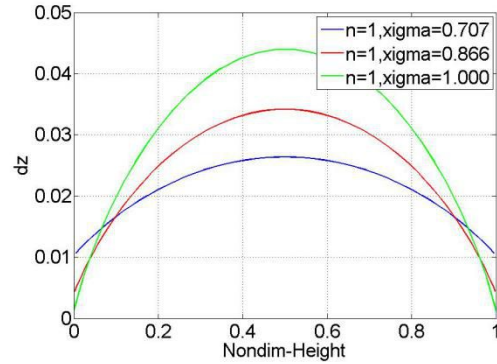


图 2-16b: 格距随高度分布 (σ 不同)

2.8.2 边界条件

理想 Raileigh-Benard 对流是无侧边界的，Julien 等人（1996）在做数值试验时常将上下边界温度设为定值、速度设为 *strss-free* 或 *no-slip*。数值模拟做不到“无侧边界”这一条件，人们常用周期边界条件来近似无边界（Julien，1996）。Stevens 等（2011）研究了旋转热对流中边界条件的影响，发现旋转足够快（ Ta 足够大）时边界对流体内部影响很小，在理论上支撑了周期边界条件这一近似。我们首先完成了 *no-slip* 边界条件的版本，周期边界条件的版本尚未完成。

(1) 温度边值

我们设定上下边界分别为恒定的 $\theta = 0$ 和 $\theta = 1$ 的 Dirichlet 边值，侧边界为绝热的 Neumann 边值。由于温度格点在物理边界上无定义，因此 Dirichlet 边值可表示为最外层格点和次外层格点在物理边界上温度的线性插值为 0：

$$\theta_{-1/2} = (\theta_b - \theta_{1/2} \frac{z_0 - z_{-1/2}}{z_{1/2} - z_{-1/2}}) / (-\frac{z_{1/2} - z_0}{z_{1/2} - z_{-1/2}}) \quad (2.8.2)$$

Neumann 边值表示为最外层格点和次外层格点温度值相等：

$$\theta_{-1/2} = \theta_{1/2} \quad (2.8.3)$$

(2) 速度边值

我们设定三个速度分量在 6 个边界面上的速度都为 0 的 Dirichlet 边值。

对于物理边界上有格点定义的物理量，直接令为 0；对于无格点定义而在物理边界之外有虚点的，虚点的赋值方法同温度的 Dirichlet 边值。

2.8.3 初始条件

物理实验中，热对流是由 Raileigh-Taylor 不稳定引发的，当流体温差达到阈值时 ($Ra = Ra_c$)，温度和速度的涨落会带来随机扰动，扰动迅速生长导致对流爆发。为了在数值试验中再现这一过程，我们首先设定初始无量纲温度场为底部温度为 1，其他位置温度为 0：

$$\theta = \begin{cases} 1, z = 0 \\ 0, z \neq 0 \end{cases} \quad (2.8.4)$$

由于温度在物理边界上没有定义，我们令次底层 ($k=2$) 的温度为 1，最底层 ($k=1$) 的温度为满足边界条件设为 2。我在温度场的次底层布设了了振幅在 10^{-3} 量级的扰动，随后用低通滤波器 A 做了 30 次二维平滑。 A 设定为：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/8 & 0 \\ 1/8 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 1/8 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8.5)$$

格点数为 160^3 的一次试验的次底层初始温度场如下图所示：

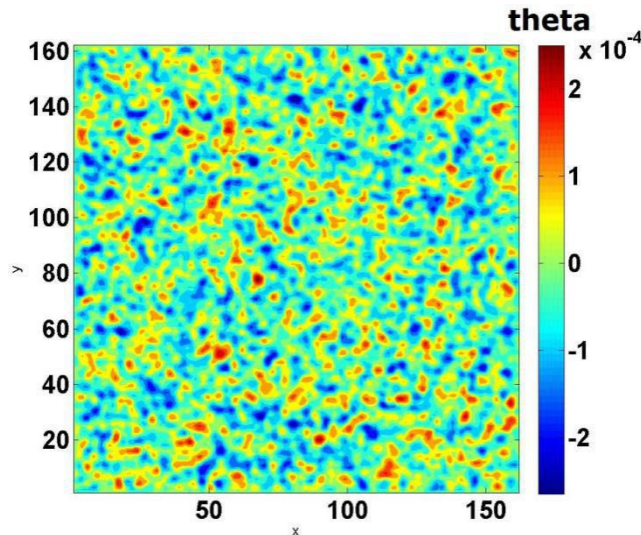


图 2-17：算例中次底层初始温度场示意图

2.9 模式的方腔流测试

我在串行、非多重网格条件下进行了正压流动的方腔流测试 (cavity flow test) (Lo 等, 2005)。主要目的是检验涡度方程扭转项新的通量计算方法的性能。

方腔流测试的基本条件是:

- (1) 上边界具有恒定的沿 x 方向速度 1, 其他边界速度为 0;
- (2) 除上边界外其他位置初始速度为 0;
- (3) 容器长宽高皆为 1。

控制流动的方程组为:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} + \text{Re} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (2.8.6)$$

唯一无量纲数为 Re 。我选取 $\text{Re} = 100$, 网格点数为 50^3 进行了测试。当流场收敛到定常后, y 分量涡度 ω_y 在 $y = 0.5$ 剖面上分布和 Lo 的结果 (2005) 吻合良好, 如下图:

好, 如下图:

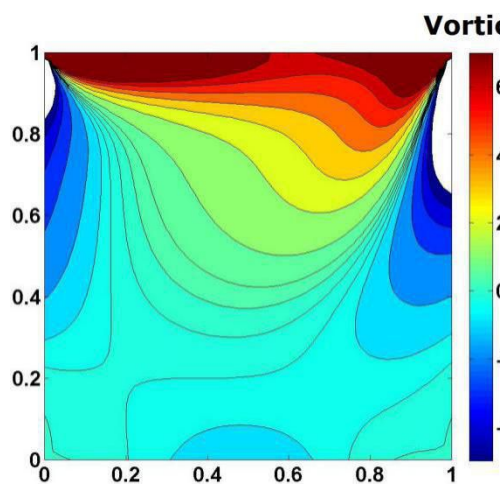


图 2-17(a): 本模式方腔流测试结果

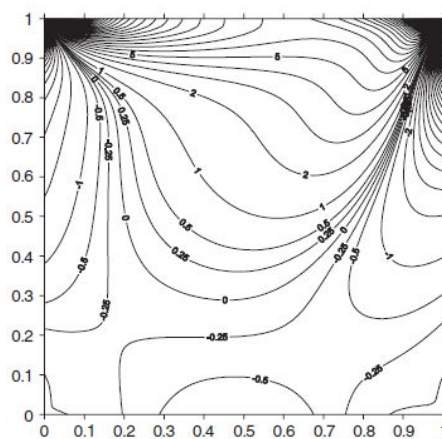


图 2-17(b): Lo 的模式方腔流测试结果

我作了 u 分量速度沿容器垂直轴 ($x = 0.5$, $y = 0.5$) 的速度廓线 (蓝色),

以及 w 分量速度沿容器 x 方向水平轴 ($y=0.5, z=0.5$) 的速度廓线 (红色), 与 Lo 的结果 (2005) 基本一致。

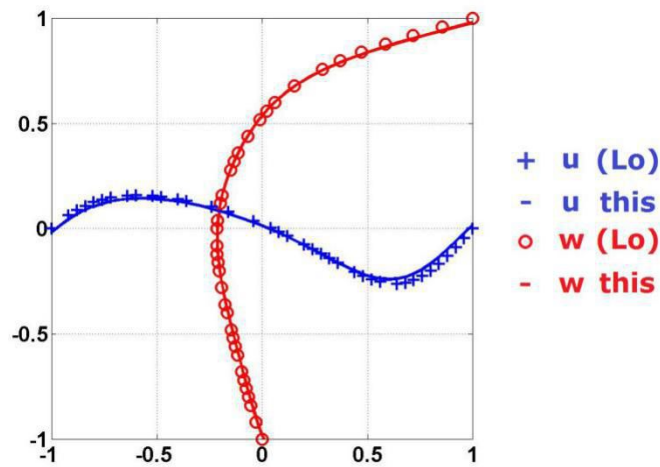


图 2-18: 本模式与 Lo (2005) 的 u 、 w 廓线比较

2.10 模式的算法结构及 MPI 并行架构

在模式分辨率较高时, 如果仅使用单核计算, 无论在计算速度还是内存容量上都无法要求。为此, 我在完成串行版本的模式后设计并完成了它的 MPI 并行架构, 在 TH (天河) -1A 系统上进行了并行性能测试。通过对比不同分辨率和不同 CPU 数量的并行加速比, 这一 MPI 并行方式有效提升了模式计算效率。本节基础知识整理自 Hagers 的书 (2014) 和都志辉的书 (2001)。

2.10.1 并行计算原理

由于单个 CPU 的主频提升存在技术瓶颈, 人们想到将很多计算机连接起来“协作”进行计算。与此相对应, 人们在编写程序时需将一个总体任务分解为许多有一定独立性的子任务, 每个子任务执行不同的代码, 子任务之间通过通信来交换信息, 这种工作模式称为“功能并行性”。在子任务完全独立的条件下, N 个处理器处理同样规模任务时所需时间为 1 个处理器的 $1/N$; 当子任务有相关性时, 所需时间一定会多于 $1/N$ 。这种随着处理器数量增加, 并行加速效果的变化特性称为并行扩展性。影响并行扩展性的因素一般有以下几种:

(1) 负载不均衡

当子任务被分配的工作量不同、或者它们对硬件的需求不同时，会导致负载不均衡：先完成某段任务的处理器会在同步点处闲置以等待后完成任务的处理器，计算资源被浪费。在地球流体数值模拟中，由于对流等物理过程在不同地区和时间段发生频率不同，物理过程参数化算法容易导致严重的负载不均，这是当前一个研究热点（伍湘君，2011）。

(2) 瓶颈

当多个处理器需要共享如 I/O 设备、数据通路等系统资源时，对它们的并行访问带来瓶颈。

(3) 启动并行

启动并行程序本身需要时间，在程序本身运行较短时，启动开销不容忽视。

(4) 通信

各处理器之间需交换信息。在主从模式的并行算法中，各子进程要向根进程发送消息或者由根进程向子进程发送；在对等模式的算法中，有数据依赖的进程之间要做通信。信息传输时间由数据流和延迟组成，前者在节点间通信时由千兆以太网的带宽决定，后者与数据传输协议、消息传输经过的交换机数目等数据链路特性有关。一般而言，数据的局部性越好，所需通信越少。

为了定量刻画并行扩展性，定义并行效率：

$$\varepsilon(N) = \frac{N \text{个处理器的并行性能}}{N \times 1 \text{个处理器的性能}} = \frac{\text{加速比}}{N} \quad (2.10.1)$$

这一指标可用于考察模式在特定问题规模下的并行提速程度。为弄清并行效率的决定因素，人们在 Amdahl 工作的基础上定义问题规模固定时的加速比：

$$S_f = \frac{\text{串行时间}}{\text{并行时间}} = \frac{1}{s + \frac{1-s}{N} + c(N)} \quad (2.10.2)$$

其中 s 为必须串行部分的工作所花时间占单线程处理的总时间的比例， p 为相应的可并行化的部分， $s + p = 1$ 。 $c(N)$ 为 N 个处理器之间的通信开销。当 N 增大时，一般加速比会降低。

在本模式中，平衡负载与降低通信规模是主要问题。

2.10.2 并行编程模型的选择

简单而言并行编程模型是一系列的编译器指令，已经封装好并一般有针对性 C 和 FORTRAN 的接口。常见的并行编程模型包括 OpenMP 和 MPI。

进程指一个独立占有有一定存储空间的正在执行的程序；线程为一群共享内存的程序中的一个，是“轻型”进程。使用 MPI 并行的程序为一群进程，OpenMP 则运行了一群线程。

OpenMP 是共享内存的并行方式，一般在一个计算节点内使用。一个 OpenMP 程序内有许多并行执行程序的“线程”（一般不超过一个节点内 CPU 数），用户可以指定它们共享节点内的部分公共地址空间，也允许它们拥有独立的地址空间存放变量。OpenMP 的优势在于启动线程的开销比启动进程要小，而且通过共享内存而避免了“显式的通信”。其缺点是线程数量受节点内 CPU 数限制，不适宜进行大规模并行计算。

MPI 是（Message Passing Interface）是一种利用消息传递进行进程间通信的并行编程模型，适用于分布式存储的并行机（与共享内存相对应）。一个处理器无法直接访问另一个处理器的地址，无法共享内存，程序要调用封装好的消息传递函数来获取别的处理器的信息。MPI 并行程序由 N 个分别运行在 N 各处理器上的串行进程组成，编程时用进程标识符（通常声明为 `myid`，往往用到大量对 `myid` 的判断和循环语句）来区分彼此。由于 MPI 并行程序既可以运用一个计算节点内的处理器，也可以跨节点，因而可进行大规模并行计算。缺点是编程比较麻烦。

由于一般集群上一个计算节点只有 8 个处理器，无法满足高分辨率湍流直接模拟的要求，因此我采用了 MPI 并行编程模型。

2.10.3 模式算法结构

我首先介绍并行分块策略和对应的通信方案，随后介绍整个 MPI 并行模式的编程流程图。

(1) 并行分块策略

在分块前，我们必须弄清模式各部分计算规模。热对流模拟有两个阶段：对流爆发之前和之后，两阶段中模式各子程序计算规模也不同。对流爆发前，速度变化很小，矢量泊松方程往往只需迭代 1 步，和涡度方程、热流量方程显示向前积分的计算量相近，但方程组需要漫长地积分（一般多于 10000 步）至这一阶段结束；对流爆发后，矢量泊松方程计算量陡增，耗时占整个程序的 80% 以上。中等分辨率下串行 I/O 时间在 2 秒以内，直接由根进程完成即可，不需要并行。另外，由于 MAC 网格要进行频繁的插值，需要声明大量数组，模式的内存消耗巨大，如果一个节点内 8 个进程都声明全部的数组，在分辨率达 $400 \times 400 \times 100$ 时即内存溢出。

由此看来，模式必须串行的部分只有耗时较少的 I/O 操作（相当于上节介绍的公式中 s 很小， p 很大），在计算时不必做主从模式。又考虑到内存消耗较大，宜将变量分布地存储。因此，我采用了立方体形的区域分解：每个进程存放 7 个未知变量和其他辅助变量中的一部分，通过定义好的分割线对 MAC 网格进行物理坐标上的划分（多重网格法中粗网格也如此）。给变量赋存储空间时全部留两排“halo”区域用于交互信息的存储，数组起始坐标全部以串行时该位置的坐标为准。并行版本模式的 CPU 数量最小为 8。分块示意图如下：

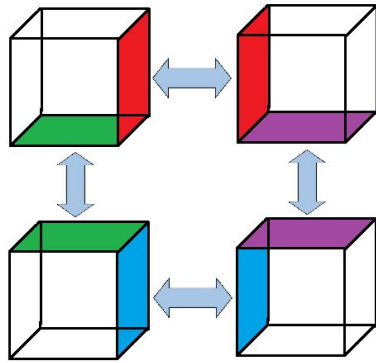


图 2-19: MPI 并行分块和通信方式示意图

(2) 编程流程图

模式采用模块化编程，有以下主要技术特点：

1) 大型数组变量在 `MODULE array` 中声明为可变数组，在各子程序中直接调用，免去繁杂的声明。

2) I/O 接口采用 `netcdf`，封装于 `MODULE ncIO`，便于和 `MATLAB`、`NCL` 等后处理软件衔接。如果模式运行期间作业中断，可读入上一步输出结果继续计算。

3) 通信分单层和双层两种，全部采用阻塞通信，使用时只需将待通信数组和它的通信起始位置传递给封装好的 `communicate.f90` 子程序即可。

4) 各进程负责存储自己区域的所有变量数组，根进程需再单独声明全场变量用于 I/O，内存占用小。

5) 调整 CPU 数量方便，只需在 `input_parameter.txt` 中输出 x 、 y 、 z 三个方向的分块数即可自动进行块划分。

6) 编译采用 `Makefile`，在仅对程序进行局部调整时加快了编译速度。

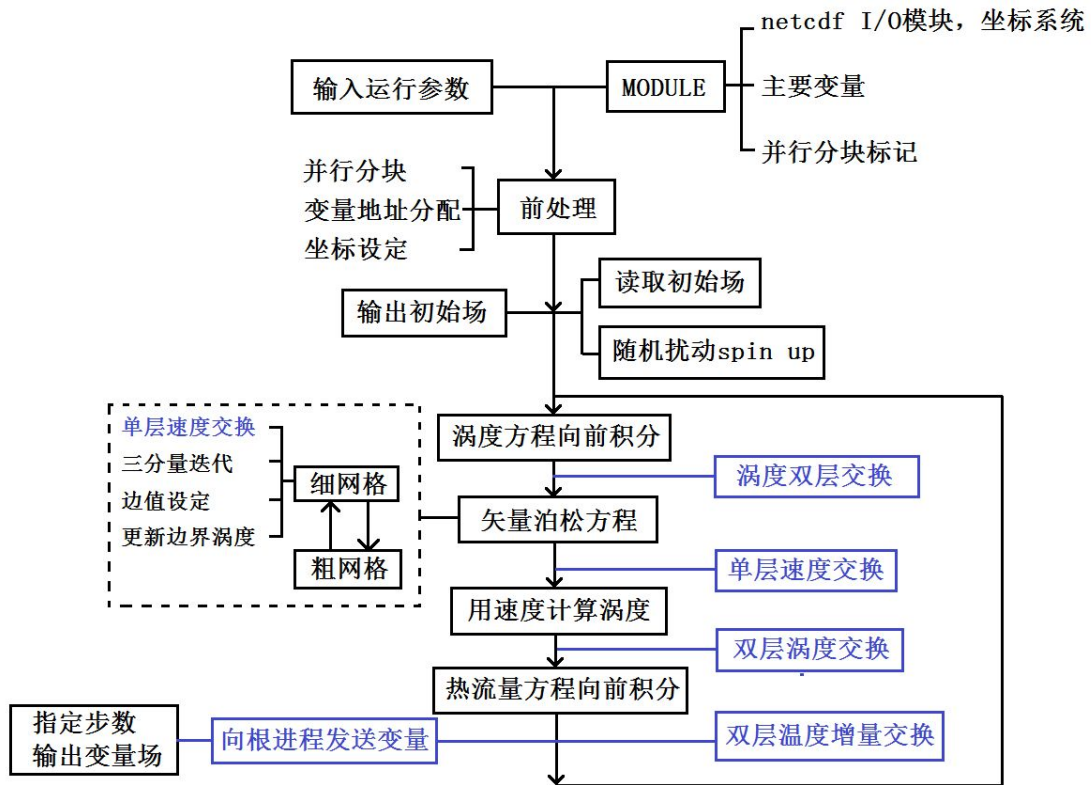


图 2-20: 简易模式编程流程图

2.10.4 模式并行性能测试

我选取 CPU 个数为 8、16、32、48、64、80，在网格数为 80^3 、 160^3 、 240^3 、 320^3 的计算规模下测试了无多重网格时模式的并行加速比。测试时长为一个时间步长，其中矢量泊松方程进行了 180 次迭代，无 I/O。以 CPU 个数为横轴，加速比效果见下图：

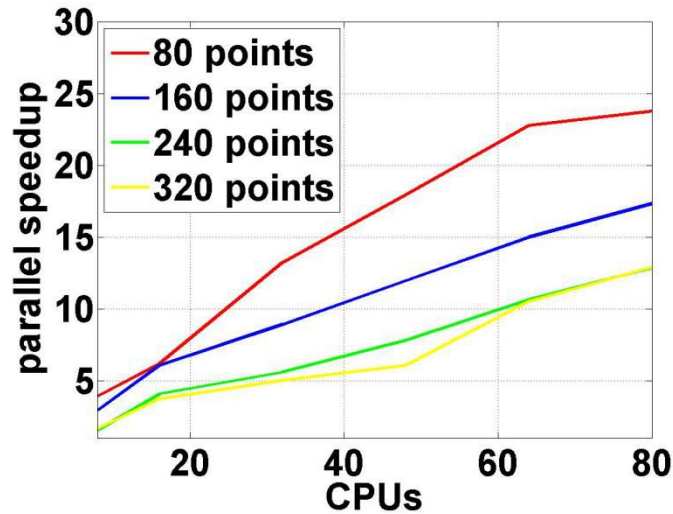


图 2-21: 并行加速比随 CPU 个数的变化

我们发现，在相同计算规模下，CPU 数量越多，加速比越高；在计算规模小于 240^3 时，计算规模越大加速比越低；在 240^3 及以上时，计算规模对加速比的影响较小。由此可见，模式具有较好的并行扩展性，但计算规模较大时仍需提速。未来我考虑采用非阻塞通信，以及将 Weighted-Jacobi 迭代法改成共轭梯度法等更高级的算法以提高效率。

2.11 旋转热对流模拟算例

我在 $Pr = 7.11$ (纯水), $Ta = 2.18 \times 10^{10}$ 的较高速旋转状态下, 对 $Ra = 2.23 \times 10^7$ 和 $Ra = 3.88 \times 10^6$ 两种加热强度进行了粗略数值试验。它们对应的实际物理情形为: 以蒸馏水为工作流体, 平台旋转周期为 3.39 转/分钟, 水槽长宽皆为 10cm (实际水槽为 20cm), 高 5cm (实际水槽为 5.3cm), 温差分别为 1.2K 和 0.5K。格点数为 $120 \times 120 \times 80$, 由于计算资源限制未达到 DNS 对边界层格点数量要求。无量纲温度初始扰动振幅分别为 8.3×10^{-4} 和 2×10^{-3} (本不该有差异, 系操作失误导致)。积分时间步长为 2×10^{-7} , 8 个 CPU 并行计算, 高瑞利数算例迭代误差限为 10^{-3} , 低瑞利数的为 10^{-2} 。由于尚未计算热通量, 故不知道通量瑞利数, 尚未确定所处区间。

我选取了高瑞利数 7200 步/13500 步和低瑞利数 50000 步/66700 步的无量纲温度来介绍, 两个时次分别代表对流爆发初期/对流趋近平稳两个阶段。

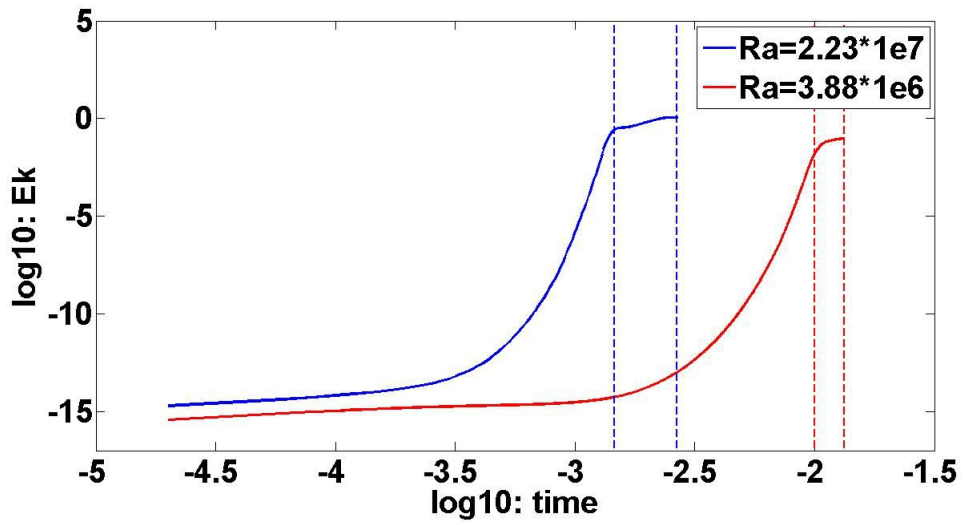


图 2-22: 实线为对数坐标系下两组算例的流体平均动能; 虚线为温度切片图对应的时刻。初期蓝线与红线起点不重合是操作失误引起的初值差异造成的。

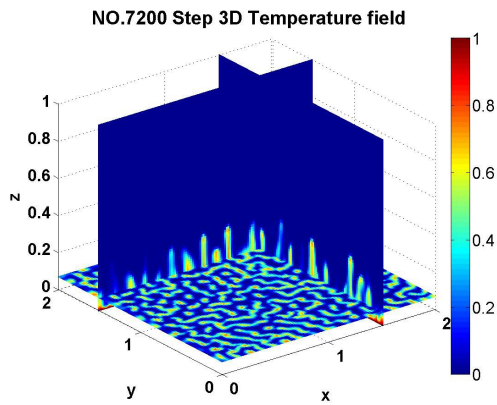


图 2-23a: 1.2K 温差, 7200 步温度场

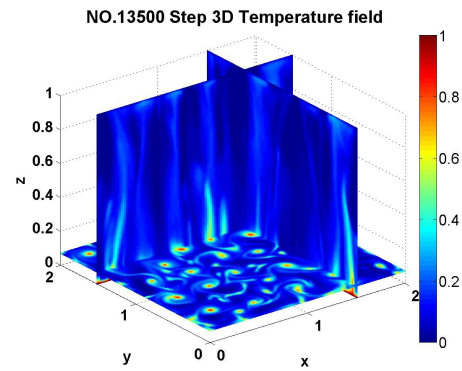


图 2-23b: 13500 步温度场

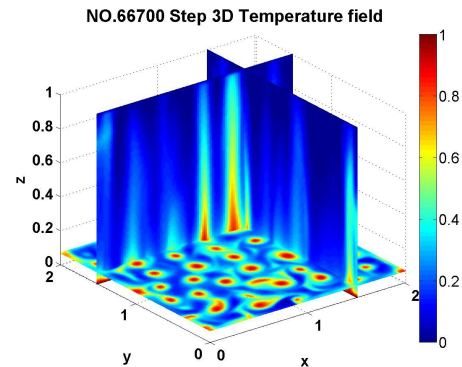
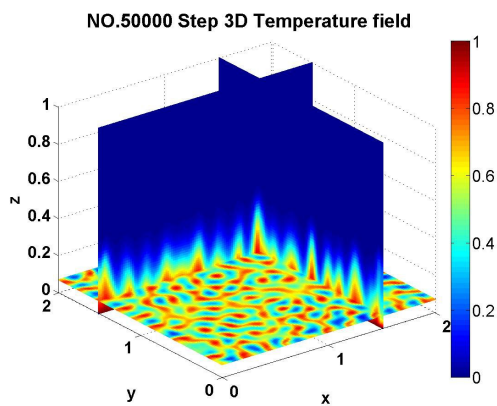


图 2-24a: 0.5K 温差, 50000 步温度场 图 2-24b: 66700 步温度场

从平均动能时间序列上可见, 即便高瑞利数算例的初始温度扰动低于低瑞利数算例, 但对流仍发展仍提前了 1 个数量级、基本平稳后的动能高 1 个数量级。两组算例分别在 7200 步/50000 步左右出现了动能突变, 我们定义此时为对流爆发时刻。

对于高瑞利数情形, 初始温度扰动的高温区较快地发展出对流, 急速上升的热泡头部有羽流特征, 但羽流与下边界之间仍有高温区联系而呈悬丝状, 热泡位置相对稳定, 不像无旋转那样羽流直接脱离下边界冲到上边界。涡旋之间因强烈相互作用而有明显的抽丝现象 (filamentation), 流场变化剧烈。

对于低瑞利数情形, 初始稳定与扰动的发展较慢, 上升热泡被下边界牵制而只能缓速上升, 原本成片状的等温线 (扰动较高瑞利数算例的波数小, 因为对流爆发更迟而热扩散的平滑作用更强) 纷纷闭合而在温度场上表现为一个个孤立的圆锥形“热塔”结构。随后自大约 56000 步开始, 孤立的“热塔”开始相互并和成更大的椭圆形涡旋, 涡旋尺度和高瑞利数时相近, 流场变化缓慢。

综上, 本模式基本能模拟出旋转热对流的爆发和涡旋相互作用过程, 但这次试验参数设定并不严格, 结果仅作了简要定性分析。另外, 我认为模式必须还要经过临界瑞利数测试 (Julien 等, 1996) 才能被证明为可靠的。

3 高速旋转状态下涡旋结构的建模

涡旋是旋转热对流流场的主要角色, 这些涡度聚集的地方也成为“concentrated vortex” (Aleeksenko 等, 2007)。在边界层 Ekman 抽吸 (Stevens, 2011) 的作用下, 对流涡旋在微团远离边界时气旋式辐合, 接近另一边边界时反气旋式辐散的特点。当平台旋转足够快时, 涡管基本直立, 连接上下顶板的涡旋整齐排列, 清晰可见。这一状态被称为“regular vortex grid regime” (Boubnov 等, 1995)。

我对这一区间内的涡旋形成和演化机理很感兴趣，与孙世玮等我院学生创新实验室同学们合作研制了旋转热对流实验系统。我们用粒子图像测速软件对单个涡旋的速度场做了精细测量，首先评估了前人涡旋模型与实验结果的匹配程度。随后在测量结果中涡度随高度呈线性分布这一事实的启发下，我尝试建立垂直涡度和垂直速度的关系。通过比较各项量级简化涡度方程，我获得了这类涡旋垂直速度廓线的一种可能的解析解。

前人的涡旋结构模型

3.1 前人的涡旋模型

3.1.1 Veronis 的波动解

Veronis (1959) 提出了一种涡旋结构模型。在上下边界 stress-free、侧边界为周期边界的条件下，他将两种波动解带入线性化的方程组（平流项为二阶小量而被略去）后分别得出了矩形和六角形排列的涡。其中六角形分布的涡垂直速度和垂直涡度为：

$$\begin{cases} w = \frac{1}{3} \left\{ 2 \cos \frac{2\pi}{L\sqrt{3}} x \cos \frac{2\pi}{3L} y + \cos \frac{4\pi}{3L} y \right\} W_0 \sin \pi z \\ \omega_z = \frac{1}{3} \left(\frac{2\Omega d}{\nu} \right) \frac{\pi}{\pi^2 + a^2} \left\{ 2 \cos \frac{2\pi}{L\sqrt{3}} x \cos \frac{2\pi}{3L} y + \cos \frac{4\pi}{3L} y \right\} W_0 \cos \pi z \end{cases} \quad (3.1.1)$$

其中 $z = \pm \frac{1}{2}$ 为上下边界。无论对上升涡和下沉涡， w 随高度变化为随高度变化的正弦函数，垂直涡度 ω_z 则为余弦函数且在 z 方向是无偏的。这一工作可指导我们研究涡旋间距、单个涡旋结构，但 Veronis 未指出这一解成立的参数区间，不过由于解是定常的，很有可能适用于我们感兴趣的 regular vortex grid。

3.1.2 Vorobieff 的 Sullivan 涡

Vorobieff 认为，边界附近涡旋实质是一种 Sullivan 涡（刘适式等，2011）。Sullivan 涡的思路是由给定垂直速度强迫下求解粘性控制的轴对称涡旋结构。其

出发方程组为垂直动量方程和连续方程：

$$\begin{cases} V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right] \\ \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{\partial}{\partial z} (rV_z) = 0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Sullivan 假定垂直速度 V_z 为 z 的一次函数，它的径向变化为待求量之一；径向速度 V_r 随高度不变。

$$V_z = \alpha z G(r) \quad V_r = F(r) \quad (3.1.3)$$

把这两个条件带入两个方程以求解 $F(r)$ 和 $G(r)$ 。通过进一步设 F 和 G 的特解，得到：

$$\begin{cases} V_r = \alpha r \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right) \\ V_\theta = \frac{\Gamma \alpha}{8\pi \nu} r \left(1 - \frac{2}{3} \frac{r^2}{r_0^2} \right), \quad \text{其中 } r_0^2 = \frac{16\nu}{3\alpha} \\ V_z = -2\alpha z \left(1 - 2 \frac{r^2}{r_0^2} \right) \end{cases} \quad (3.1.4)$$

这表明涡旋周围以 r_0 为半径的区域有一个极限环（以周期轨道为微团在无穷遥远未来的归宿）。图[]给出了一个下边界附近的下沉涡示意图，涡内部下沉的流体和外围的流体在极限环上辐合上升。Boubnov 等人（1986）曾用墨水示踪发现强大下沉涡外围圆柱状或锥状的补偿上升流，我认为可能与 Sullivan 涡有关。

Sullivan 涡解是对单个涡旋局部特征的较精细猜想，但它未考虑热力的作用，仅以抽吸强度 α 间接表征对流强度，或许得和其他模型配合使用。

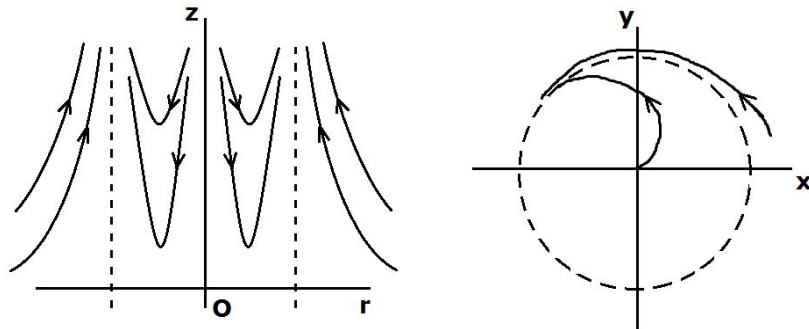


图 3-1: Sullivan 涡的垂直剖面 and 水平剖面示意图, 重绘自刘适达等 (2011)

3.1.3 Julien 的 thermal Ekman layer

Julien 等人 (1996) 尝试将 Ekman 层理论中的压强用温度代表, 以表征边界层附近热力动力共同作用下的涡旋结构, 其出发的无量纲方程为:

$$\begin{cases} -\text{Pr}\left(\frac{Ta}{16}\right)^{\frac{1}{2}}v \approx \text{Pr}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial P}{\partial x} \\ \text{Pr}\left(\frac{Ta}{16}\right)^{\frac{1}{2}}u \approx \text{Pr}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial z} \approx \text{Pr}\frac{Ra}{16}\theta \end{cases} \quad (3.1.5)$$

假设温度在边界附近随高度呈线性分布为:

$$\theta(x, y, z) = \begin{cases} 1 - z/\lambda, z < \lambda \\ 0, z \geq \lambda \end{cases} \quad (3.1.6)$$

其中 $\lambda = \lambda(x, y)$ 为表征边界层高度水平分布的函数。

他在动量方程中考虑了科氏力、摩擦力垂直部分和扰动压力梯度力, 还加入了显式含有浮力的静力平衡方程。求解时, 由给定的温度分布解出压强分布, 再用复数方法解出速度。设 λ 的分布为 Gaussian 鼓包, 方程的解 (较复杂, 在此不赘述) 表明, 下边界附近的气旋性上升涡中强大的辐合流会在涡旋中心堆积产生较大压强, 引发中央的下沉, 进而使中央出现反气旋。Julien 在湍流直接模拟中, 参数为

$Ra = 1.78 \times 10^8$, $Ta = 3.16 \times 10^8$ 时看到下边界附近气旋性涡中央涡度很弱, 虽未反号而成为反气旋, 但侧面论证了这一线性理论的参考意义。

3.2 实验装置和实验步骤

旋转热对流实验系统由步进电机驱动旋转平台和水槽组成。亚克力水槽长宽皆为 20cm、高 5cm、厚 0.5cm, 底部为 0.8cm 厚紫铜板, 顶部为 0.2cm 厚石英

玻璃。紫铜板下方由可调功率的铸铝加热板加热，石英玻璃上方为一个水冷盒，冷却水管通过旋转接头和实验室的冷水机及潜水泵连接，基本做到了底部均匀加热，上部均匀冷却，侧壁绝热。温度测量由 2 支铂电阻探头完成，一支涂装导热硅脂后插于铜板侧面的孔中，另一支用导热硅胶贴于石英玻璃下表面。仪器的设计参考了 Sakai 等人的工作（2003）。

实验进行时，首先启动加热板和冷水机使水槽上下温差达到基本稳定，随后向水槽中注入示踪粒子，立即开动转盘以免粒子大量沉积于铜板表面。流体的垂直剖面被绿色线激光照亮，水平剖面被红色线激光照亮，流场分别由佩戴对应频率滤光片的单反相机拍摄。其中负责俯视拍摄的单反相机搭载在步进导轨上，以约 10s 为一个周期做上下扫描。当流场为准定常时，可由此获得红绿激光交平面上涡旋的准三维速度结构。

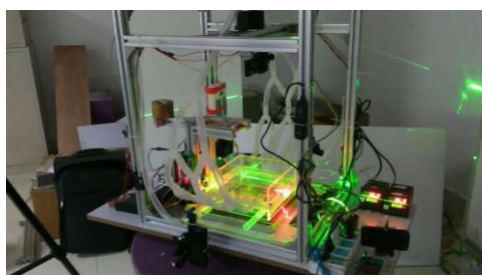


图 3-2a: 旋转热对流实验台

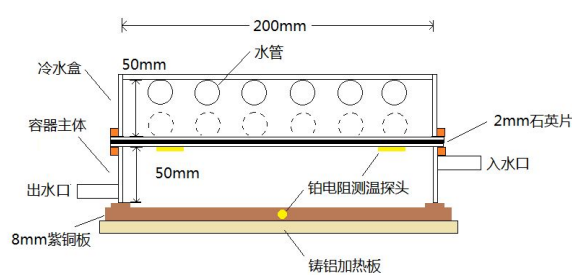


图 3-2a: 实验水槽

本次实验在 $Ra = 6.35 \times 10^7$ 和 $Ta = 9.84 \times 10^7$ 下进行。

3.3 实验结果

图 3-3 给出了涡旋的垂直速度廓线，我们看到辐合辐散主要集中在占总高度约 20% 的上下边界附近，远离边界的区域基本观察不到水平散度，垂直速度在离开水槽上下边界后近乎均匀。涡旋的垂直相对涡度也在边界层附近最大，离边界层越远涡度越小，呈近乎线性的变化，衰减得比水平散度要慢得多。这与 Veronis（1959）的涡旋模型不太吻合。由于水槽壁有难以避免的粘接污物，边界附近的流场很难看清，因而无法验证 Sullivan 涡假设的正确与否。此外，由于 Julien

等人（1996）的数值模拟并未涉及 regular vortex grid 区间，而且我们并未看到涡旋中央的涡度出现异常（可能是分辨率不够），因而 thermal Ekman layer 理论难以直接用于本问题。

综上，现有涡旋模型与我们感兴趣的平台高速旋转的 regular vortex grid 区间的单个涡旋结构的匹配程度不太高，亟需一种新的模型。由于温度和压强的分布无法直接获知，我们集中考察水槽中部的涡旋运动学特性，即考察主导流体垂直输送作用的 w ，尝试弄清相对涡度和垂直速度两者之间满足怎样的定量关系？能否由容易大范围测量的垂直涡度反推测量困难的水平散度和垂直速度，并由处在红绿激光交线上的少量涡旋来验证结果？

3.4 涡旋结构建模

由于涡旋的温度结构和压强结构未知，在水平动量方程中遇到难以回避的压力梯度立项，垂直动量方程中遇到浮力项。为了规避温度和压强这两个难以做大范围测量的量，我便想到采用涡度方程，而涡度方程的垂直分量中既不包含温度也不包含压强，是研究运动学量间关系的较好平台。下面尝试利用简化的垂直涡度方程，在 Ekman 层状况未知的情况下建立边界层外涡旋结构的解析模型。

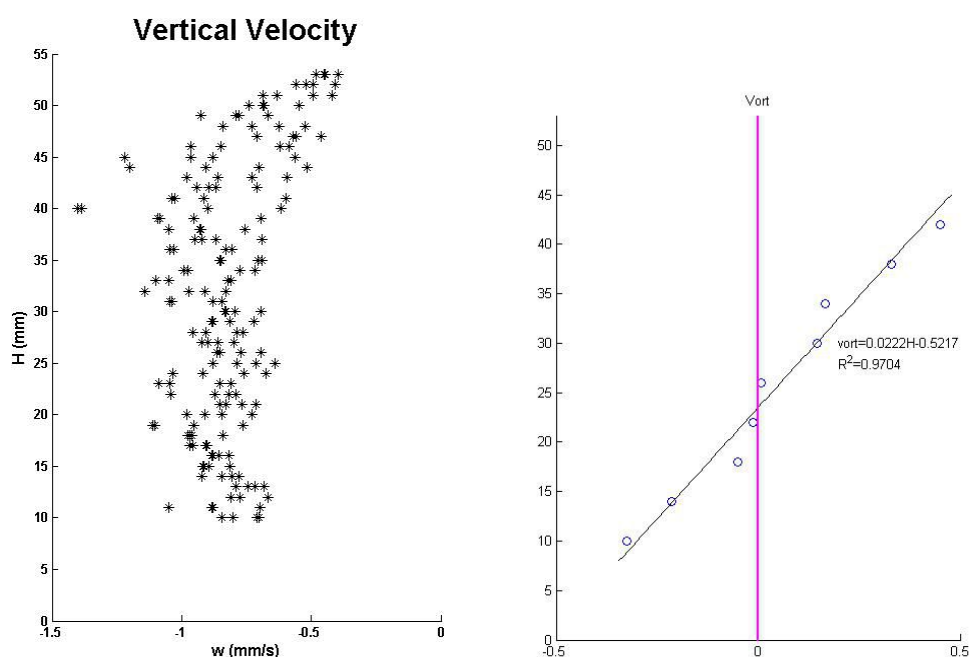


图 3-3：垂直速度廓线

图 3-4：垂直相对涡度廓线

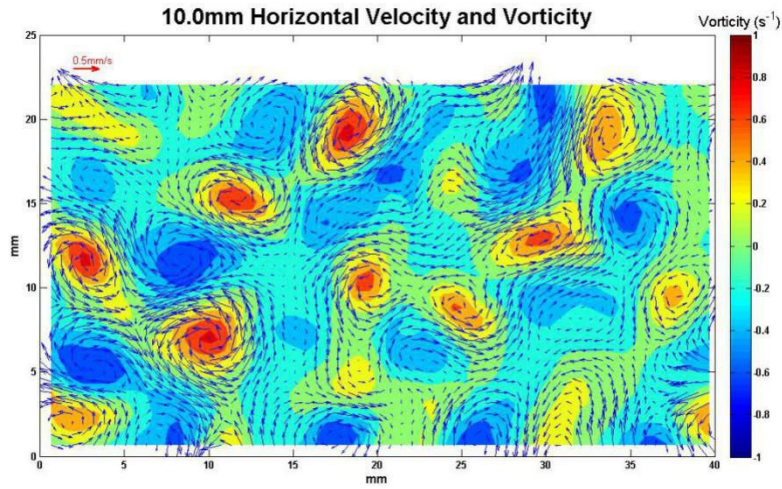


图 3-5：低层水平流场（填图为相对涡度）

3.4.1 涡度方程各项量级比较

定常流的涡度方程垂直分量可写为：

$$u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \omega_x \frac{\partial w}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial w}{\partial y} + (\omega_z + f) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) \quad (3.4.1)$$

利用不可压连续方程和涡度散度为 0 的性质，将平流项和扭转项改写为通量形式，以便后面说明涡核的含义：

$$\frac{\partial u \omega_z}{\partial x} + \frac{\partial v \omega_z}{\partial y} = f \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial w \omega_y}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right) \quad (3.4.2)$$

通量形式的水平涡管扭转项实质由原水平涡管扭转项和垂直涡度对流输送项共同组成。考虑到涡旋沿垂直轴近乎对称，只考虑径向变化的方程在柱坐标下的表达式为：

$$\frac{V_r \omega_z}{r} + \frac{\partial V_r \omega_z}{\partial r} = f \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\omega_t w}{r} + \frac{\partial \omega_t w}{\partial r} + \nu \left(\nabla_h^2 \omega_z - \frac{\omega_z}{r^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2} \right), \quad (3.4.3)$$

其中：
$$\nabla_h^2 = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad \omega_t = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{\partial V_t}{\partial z} = - \frac{\partial V_t}{\partial z}$$

方程中各物理量表示的是涡核附近的平均量。

现给出各物理量及算子的量级。

表 3-1: 特征量量级

尺度	水平尺 度 L	垂直尺 度 H	径向速 度尺度 U_t	切向速 度尺度 U_r	垂直速 度尺度 w	地转涡 度 f	运动学 粘性系 数 ν
量级	1e-2	1e-1	1e-3	1e-4	1e-3	0.74(1e 0)	1e-6

由于径向速度较小而难以测量，其尺度由连续方程估计：

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_t}{\partial \theta} = - \frac{\partial w}{\partial z}, \quad U_r = \frac{WL}{H} \quad (3.4.4)$$

表 3-2: 各项量级

物理量	$\frac{\partial V_r \omega_z}{\partial r}$ $+\frac{V_r \omega_z}{r}$	$f \frac{\partial w}{\partial z}$	$\frac{\omega_t w}{r}$ $+\frac{\partial \omega_t w}{\partial r}$	$\nu(\nabla_h^2 \omega_z - \frac{\omega_z}{r^2})$	$\nu \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2}$
名称	涡度水平 通量项	地转涡 度的散 合项	水平涡管扭 转项	水平涡度粘性 项	垂直涡度 扩散项
特征量	$U_r U_t^2 / L^2$	fW / H	fW / L	$\nu U_t^2 / L^3$	$\nu U_t^2 / H^3$

量级	1e-6	1e-2	1e-1	1e-6	1e-9
----	------	------	------	------	------

需要说明的是， $f \frac{\partial w}{\partial z}$ 的量级在边界附近较大，远离边界处较小，量级不好

估计。对于，相对涡度的垂直扩散项，由于其量级较小，而且实验表明涡度随高度呈近乎呈线性变化，故这项略去。保留其余的水平涡管扭转项、涡度水平通量项、水平涡度粘性项和地转涡度的散合项四项。我的思路是尽量保留多的项，但想办法简化每一项的形式并寻找其内在联系。

3.4.2 方程简化与定性讨论

我们定义涡核为包含涡旋涡度的圆柱形区域，将涡度方程在圆柱的每一层上取平均：

$$\frac{\overline{V_r \omega_z}}{R} + \frac{\partial \overline{V_r \omega_z}}{\partial r} = f \frac{\partial \overline{w}}{\partial z} + \left[\frac{\partial V_t}{\partial z} \frac{w}{r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{\partial V_t}{\partial z} w \right) \right] + \nu (\nabla_h^2 \overline{\omega_z} - \frac{\overline{\omega_z}}{R^2}) \quad (3.4.5)$$

之后为方便将略去 bar。定义 R 为“涡旋有效半径”，用于衡量入流区范围。

我们想办法将变量都用 $w = w(z)$ 来表示，为此做几点假定：

- (1) 假定涡度随高度的变化是线性的，满足函数：

$$\omega_z = \alpha z \quad (3.4.6)$$

(2) 假设在涡旋中心附近，散度在涡核内是均匀的，即径向速度 V_r 随 r 呈线性变化，其大小由连续方程给出：

$$\frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_r}{\partial r} = 2 \frac{V_r}{r} = -\frac{\partial w}{\partial z}, \quad V_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.4.7)$$

- (3) 假设涡核内涡度时均匀的，切向速度可由垂直涡度给出：

$$V_r = \frac{\omega_z}{2} r = \frac{\alpha z}{2} r \quad (3.4.8)$$

(4) 考虑到涡旋呈正、反号交替分布，我们用五点有限差分方法来近似水平粘性，

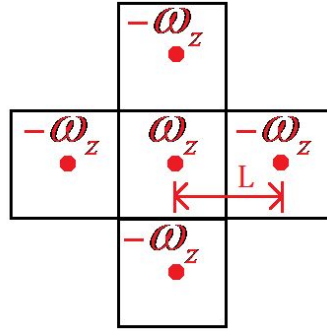


图 3-6: 粘性项近似计算方法示意图

可得 $\nu \nabla^2 \omega_z \approx -\nu \frac{8}{L^2} \omega_z = \beta \omega_z$, β 为常数

(4) 假设: $\frac{\partial \omega_z}{\partial r} \approx -\frac{2\omega_z}{L}$

(5) 假设涡旋有效半径为: $R = \frac{L}{4}$

理由是, $L/2$ 对应涡旋边界到涡核距离, 而入流区应当在涡旋边界和涡核中间部位最强, 故取 $L/4$ 为涡旋有效半径。

为了方便说明各项的物理意义, 我将通量形式的涡度方程化回平流格式:

$$V_r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} + w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \omega_t \frac{\partial w}{\partial r} + (\omega_z + f) \frac{\partial w}{\partial z} + \nu (\nabla_h^2 \omega_z - \frac{\omega_z}{r} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2}) \quad (3.4.9)$$

(1) 涡度平流输送项:

$$V_r \frac{\partial \omega_z}{\partial r} = -\frac{2V_r \omega_z}{L} = \frac{R}{L} \alpha z \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4} \alpha z \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.4.10)$$

(2) 涡度对流输送项:

$$w \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = w \alpha \quad (3.4.11)$$

(3) 水平涡管扭转项:

$$\omega_t \frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{\partial V_t}{\partial z} \left(\frac{-2w}{L} \right) = \frac{R}{L} \alpha w = \frac{1}{4} \alpha w \quad (3.4.12)$$

(4) 相对涡度散合项:

$$\omega_z \frac{\partial w}{\partial z} = \alpha z \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.4.13)$$

(5) 地转涡度散合项:

$$f \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.4.14)$$

(5) 粘性项:

$$\nu \nabla^2 \omega_z = \beta \alpha z, \beta < 0 \quad (3.4.15)$$

我们发现涡度垂直输送和水平涡管扭转项仅差一个系数,前者对涡旋的涡度有正贡献,后者为负贡献,而且前者作用强于后者。涡度平流输送项和相对涡度散合项也仅差系数,表明涡管拉伸(收缩)时会增强入流,有负涡度平流。粘性项总会削弱涡度。地转涡度散合项在出发边界附近会带来正涡度,在到达边界附近带来负涡度。由此,我们将各项在涡旋不同部位的贡献总结为下表,“前半程”表示微团在出发边界所在半平面,“后半程”为它在到达边界半平面;填有相同颜色的项表示数值仅差系数。

表 3-3: 涡旋不同区域中各项符号(定性分析)

	前半程		后半程	
	实际值	绝对值	实际值	绝对值
涡度平流输送	-	-	+	-
相对涡度散合项	+	+	-	+
涡度对流输送	+	+	-	+
水平涡管扭转项	-	-	+	-

地转涡度散合项	+	+	-	+
粘性项	-	-	+	-

我们的定性分析是，离边界流在边界摩擦作用下发生强烈的涡管拉伸，流体水平辐合产生上升运动，垂直涡度从边界附近向流体内部输送，但空间不均匀的上升运动将水平涡管部分扭转至垂直方向而减弱涡旋运动，同时水平摩擦也将涡度不断地耗散，几种作用平衡导致涡旋呈螺旋状。几种作用的定量关系如何？

3.4.3 方程求解

原方程可写为：

$$-\left(-\frac{R}{L}+1\right)\alpha z \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{3}{4}w\alpha - f \frac{\partial w}{\partial z} - \beta\alpha z = 0 \quad (3.4.16)$$

为简化求解，定义 $\beta' = \frac{4}{3}\beta$ ， $f' = \frac{4}{3}f$ ，并带入 $\frac{R}{L} = \frac{1}{4}$ ，方程变为：

$$-\alpha z \frac{\partial w}{\partial z} + w\alpha - f' \frac{\partial w}{\partial z} - \beta'\alpha z = 0 \quad (3.4.17)$$

经移项可得：

$$\frac{dw}{dz} + \frac{\alpha}{h(z)}w - \frac{\beta'\alpha}{h(z)}z = 0 \quad (3.4.18)$$

其中：

$$h(z) = c_1 + c_2z = -\alpha z - f' \quad (3.4.19)$$

注意到这是一个线性非齐次常微分方程，可用常数变易法（李忠等，2009）求解，解的形式为：

$$w(z) = q(z) \exp\left(-\int_{z_0}^z \frac{\alpha}{h(z)} dz\right) \quad (3.4.20)$$

$$\text{其中 } q'(z) = \frac{\beta'\alpha}{h(z)}z \exp\left[\int_{z_0}^z \frac{\alpha}{-\alpha z - f'} dz\right]$$

积分，并设 $z_0 = 0$ 可得：

$$\begin{aligned}
q(z) &= -\beta'(z_0 + f'/\alpha) \int_{z_0}^z \frac{z}{(z + f'/\alpha)^2} dz + C \\
&= -\beta'(z_0 + f'/\alpha) \left[\int_{z_0}^z \frac{1}{(z + f'/\alpha)} dz - \frac{f'}{\alpha} \int_{z_0}^z \frac{1}{(z + f'/\alpha)^2} dz \right] + C \\
&= -\beta' \frac{f'}{\alpha} \left[\ln(z + \frac{f'}{\alpha}) - \ln \frac{f'}{\alpha} + \frac{f'}{\alpha} \frac{1}{z + f'/\alpha} - 1 \right] + C \tag{3.4.21}
\end{aligned}$$

进一步定义“地转标高” $z^* = f'/\alpha$ ，可得：

$$q(z) = -\beta z^* \left[\ln(z^* + z) - \ln z^* + \frac{z}{z + z^*} - 1 \right] + C \tag{3.4.22}$$

在本次测量中， $f' \approx 3.7 \times 4/3 \approx 4.9$ ， $\alpha \approx 10$ ， $z^* \approx 0.49 \gg z$ ，因此可做近似：

$$\ln(z^* + z) - \ln z^* \approx \frac{z}{z^*} \tag{3.4.23}$$

可得：

$$q(z) \approx -\beta z z^* \left[\frac{1}{z^*} - \frac{1}{z + z^*} \right] + C = -\beta \frac{z^2}{(z + z^*)} + C \tag{3.4.24}$$

另一方面：

$$\exp\left(-\int_{z_0}^z \frac{\alpha}{h(z)} dz\right) = \exp\left[\ln\left(\frac{z + f'/\alpha}{z_0 + f'/\alpha}\right)\right] = \frac{z + f'/\alpha}{f'/\alpha} = \frac{z + z^*}{z^*} \tag{3.4.25}$$

两者相乘可得：

$$w(z) = -\frac{\beta}{z^*} z^2 + C \left(1 + \frac{z}{z^*}\right) \tag{3.4.26}$$

令 $z=0$ ，可得：

$$w(0) = C = w_0 \tag{3.4.27}$$

解还可化为：

$$\begin{aligned}
w(z) &= -\frac{\beta' \alpha}{f'} z^2 + w_0 \left(1 + \frac{\alpha}{f'} z\right) \\
&= -\frac{\beta' \alpha}{f'} \left(z - \frac{w_0}{2\beta'}\right)^2 + w_0 \left(1 + \frac{\alpha w_0}{4f' \beta'}\right) \\
&= \frac{8\nu \alpha}{L^2 f} \left(z + \frac{3}{64} \frac{w_0 L^2}{\nu}\right) + w_0 \left(1 - \frac{9}{512} \frac{\alpha w_0 L^2}{f \nu}\right) \tag{3.4.28}
\end{aligned}$$

我们看到，解呈现以 $z = w_0 / 2\beta'$ 为极值点的抛物线形，抛物线顶点向出发边界方向偏斜。为方便进行物理解释，我们引入表征惯性力和科氏力相对大小的局部 *Rossby* 数和表征粘性项水平部分和科氏力项相对大小的整体水平 *Ekman* 数：

$$E_{kl} = 8 \frac{\nu}{fL^2} = \frac{\beta'}{f'} = -\frac{1}{\alpha} \frac{\beta'}{z^*}, \quad Ro = \frac{3}{4} \frac{\omega_z}{f} = \frac{z}{z^*} \quad (3.4.29)$$

解可写为：

$$w(z) = E_{kl} \alpha z^2 + w_0(1 + Ro) \quad (3.4.30)$$

3.4.4 涡旋结构的一种解释

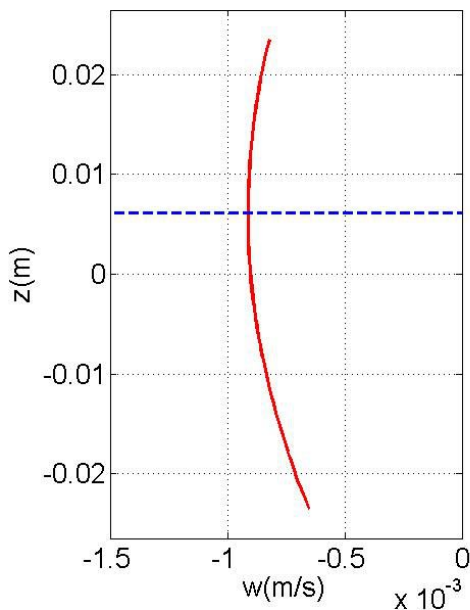


图 3-7：模型估计的水槽中部垂直速度廓线

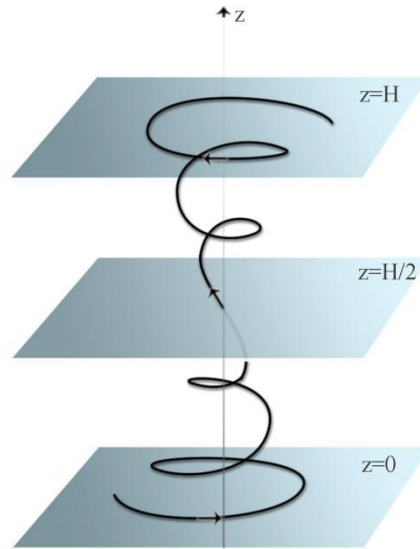


图 3-7：涡旋结构示意图

由于并非边值问题的解，在已知 ω_z 廓线的条件下，要想定出 w 的廓线还需由实验测得某一点的 w 来定下积分常数。因此，这一公式主要给出了 w 随高度变化的基本特征。我们可以得到以下推断：

(1) 如果从底板到顶板 w 函数的绝对值呈现中间大，两边小的形状，那么该公式的结果意味着 w 的极值点所在高度将更接近刚离开的边界，即下沉流廓

线存在偏度。不过由于 w 变化的量级较小，在测量中较难看到垂直速度随高度的变化。

(2) 线性涡度分布是如何维持的呢？如果下沉流廓线的确有偏度，微团开始下沉后，涡管首先经历了强烈拉伸，大量地转涡度“转变”为相对涡度，随后开始缓慢收缩；另一方面，由于 w 的绝对值快速增大，涡管扭转涡度对流输送保持在较高水平（即便受到水平涡管扭转的削弱），可以靠它弥补涡管收缩造成的相对涡度损失。当团接近底板后，涡管以比较缓慢的速度收缩，而由于 w 较小，涡度对流输送也比较弱，因此涡度线性廓线也能维持。为此，我们将各项在不用高度处对涡度的贡献总结如下：

(3) 平台旋转越快(对应 Ro 和 Ek_L 越大), w 在中层附近的变化就可能越小。但是，涡旋平均距离 L 也会减小，结果又不确定性。

(4) 流体粘性越大，廓线弯曲可能越厉害。

3.4.5 模型的问题

在假设方面，许多参数仍需调整，如：涡旋有效半径 R 、Raileigh 形式的涡度耗散项以及刚性涡核假定中散度和入流速度的关系等。

在结果方面，本模型仅给出了垂直速度 w 随高度的变化特点，由于未考虑上下边界条件，故未能给出其量级。由于实验中垂直速度不够精确，尚无法将模型结果和实际做对比并给出评价，待我的数值模式完善后考虑用模拟结果来验证。

3.4.6 补充：计算 W_0 的可行性

求解中间层的垂直速度 w_0 需要额外的条件，我想到用现有的边界层模型为本文中的中层模型提供上下边界条件，争取仅用方便测量的垂直涡度廓线推断出垂直速度廓线的全貌。我试验了经典 Ekman 理论，但明显低估了 w_0 ，下面介绍过程。

经典 Ekman 层理论从 Boussinesq 近似下仅考虑压力梯度力、科氏力和垂直

摩擦的正压方程组出发：

$$\begin{cases} -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + fv + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} - fu + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \\ -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + g\alpha\theta' = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (3.4.31)$$

在正压情形下 $\nabla_h \theta' = 0$ ，因而 $\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{\rho_0} \nabla_h p' \right) = -\frac{g\alpha}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \nabla_h \theta' = 0$ ，即压力梯度

力不随高度变化。将坐标轴的 x 轴旋转到地转风方向，水平速度解（Holton 等，2004）为：

$$\begin{cases} u = u_g \left(1 - e^{-z/h_E} \cos \frac{z}{h_E} \right) \\ v = u_g e^{-z/h_E} \sin \frac{z}{h_E} \end{cases} \quad (3.4.32)$$

其中 $h_E = \sqrt{2\nu/f}$ 为 Ekman 长度，边界层高度 h_T 定义为边界层内风速达到地转风的高度： $h_T = \pi h_E$

有了水平速度解，用不可压连续方程求边界层顶垂直速度：

$$w_T = -\int_0^{h_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz = \frac{h_E}{2} \omega_g \quad (3.4.33)$$

该式表明，边界层顶垂直速度（抽吸速度）正比于相对涡度，Ekman 长度越大（运动学粘性系数越大，地转涡度越小），同等相对涡度能对应越大的抽吸速度。

我尝试将测量到的线性相对涡度廓线延伸到距上板 h_T 高度处，计算这里的垂直速度，再算出 w_0 并与实测值比较。考虑到本模型解关于中层近乎呈轴对称，暂且忽略与 Ro 有关的那部分：

$$w(H/2-h_T) = -\frac{\beta' \alpha}{f'} (H/2-h_T)^2 + w_0 = \frac{h_E}{2} \alpha (H/2-h_T) \quad (3.4.34)$$

$$w_0 = \frac{h_E}{2} \alpha (H/2-h_T) + \frac{\beta' \alpha}{f'} (H/2-h_T)^2$$

代入 $h_E = 7.4 \times 10^{-4} m$ ，算得 $w_0 = -3.5 \times 10^{-4} m/s$ ，是实测值的 40% 左右，且表达式右端第一项（与抽吸强度直接相关）的贡献为 $w_0 = -1.8 \times 10^{-4} m/s$ 。由此可见，正压线性 Ekman 层理论低估了垂直速度。

关于低估的原因，我认为可能应将斜压性考虑到 Ekman 层中，因为斜压性会带来围绕涡旋的切向涡度而对应垂直运动，或许可提高对 w_0 的估计。Julien 等人（1996）的 thermal Ekman layer 理论能否运用还需进一步考察，因为它以 Gaussian bump 形状的温度场计算出的涡旋中心存在窄而强的逆向流动在实验中未观察到。我们也可尝试引入 Wu 等人（1982）的地转动量近似理论。他将离心力考虑到 Ekman 层理论中，建立了，说明了离心力会使气旋（反气旋）边界层变薄（厚）、抽吸变弱（强）。然而，该修正仅可能有助于研究水槽上下边界附近流动的差异，与整体垂直速度低估这一问题关系不大。

综上，用相对涡度廓线估计 w_0 进而是 $w(z)$ 的方法仍待探索。

4 总结与展望

本文介绍了作者做的两项工作：涡度-速度法数值模式研发及旋转热对流涡旋结构的建模。由于数值模式仍待进一步检验，我没有用模式输出结果来验证我提出的涡旋结构模型。

在旋转热对流涡旋结构研究方面，我提出了一种描述流体中部垂直速度和垂直涡度关系的涡旋模型。平台高速旋转时，热对流存在 regular vortex grid 区间，流场的主角是一个个准定常的直立涡旋，他们承担了相当部分热量和质量的输送与交换工作。由于流场沿垂直方向的变化小于水平方向变化，用多个剖面的水平速度测量即可完成对流场概貌和涡旋结构的考察。然而，这种测量方式无法直接

获得垂直速度，而垂直速度既是涡旋运动学的一个重要参量，也是确定涡旋输运能力的重要因素，亟需开发一种由水平速度场（实质是垂直涡度）推断垂直速度的方法。为了规避难以测量的温度和压强，我们通过建立简化模型理解垂直速度与垂直涡度间的联系。在涡旋模型方面，我首先考察了已有涡旋模型，发现它们仅适用于特定的参数区间或流场区域。对于我们感兴趣并进行实验测量的高速旋转状态下 regular vortex grid 区间的涡旋，发现垂直涡度随高度呈线性变化，几类模型都不太适用，为此我针对这一区间内远离边界的区域提出了一种涡旋垂直速度廓线模型。模型的出发方程为仅略去涡度倾向项和垂直粘性项的垂直涡度方程，我尝试将各项简化以寻找其内在联系，并将化为仅含有垂直速度 w 的方程。我利用涡核散度均匀假设建立了入流速度 V_i 和 w 的关系，利用涡核垂直涡度均匀假设建立了切向速度 V_t 和垂直涡度 ω_z 的关系。随后，利用实验中观察到的 ω_z 随高度线性变化的特点，将 V_t 表为 z 的函数；将 V_i 表为 w 的函数。方程中其他各项皆可表为 V_t 和 V_i 的函数，因而方程可化为以 w 为未知量、 z 为自变量的常微分方程。方程的解呈现在 z 方向有一定偏度的抛物线形，在靠近涡旋出发边界的区域 w 较大，反之则较小，似“鸭梨”。这一解析解表明，垂直涡度随高度的线性变化是各项平衡的结果。在涡旋离开边界时，涡管拉伸增强了涡度，底部强涡度经由对流输送不断向远离边界位置补充，而径向涡管的扭转和周围较弱涡度的水平输送则来削弱涡度，达到平衡。这一模型的主要缺陷是包括摩擦作用在内的许多参数为估计得到，在使用时需调整。模型的遗憾是仅给出了垂直速度随高度的变化状况，由于缺少上下边界条件而未能估计垂直速度规模。为此，我尝试将垂直涡度廓线代入经典 Ekman 理论以计算边界层顶的速度，但与实测值比较后发现有明显低估，说明经典 Ekman 理论可能不适用于水槽边界层建模，尚需引入其他模型。

在数值模拟方面，我自己动手完成了一个 MPI 并行的涡度-速度法模式。进行了以下技术小改进：

(1) 有限体积法用进了 MAC 网格的涡度-速度法。我把有限体积思路导出

了离散型式涡度-速度法 N-S 方程组，对扭转项采用了较高精度的分段线性插值方法而同时未引入其他点，同时未改变物理量局地性，在隐式时间积分和 MPI 并行计算时仍比较方便。

(2) 我将 Huang 在二维非等距网格下证明的 Cauchy Riemann 关系推广到了三维非等距情形，给出了对应的差分算子。

(3) 在边界耦合的矢量泊松方程解法上，我在 Naplito 非跳点多重网格的基础上设计了 MAC 网格上的多重网格法。我将 4 个细网格“MAC 方体”组合为一个粗网格“MAC 方体”，给出了不同网格间的嵌套策略；我还以“细网格是粗网格的缩小版”为思路，设计了不引入额外散度的插值和限定算子。在等距网格下算例下，3 重网格可加速到无多重网格的 50 余倍。在同样条件下，非等距网格时多重网格法误差经历短暂速降后即放缓了下降速度，效果不佳；我分析后发现误差难以下降源于粗网格误差未被抑制，于是在迭代初期加强了粗网格迭代而维持了较多步数的误差速降，当“误差瓶颈”到来时，通过设定判据转入非多重网格法完成剩余迭代，总体上仍使迭代加速了 4 倍左右。然而，非等距网格时 Jacobi 迭代法在收敛前都会保留一定散度，这使得误差限宽松时也会引入一定量散度，需改进。

(4) 我对模式做了 MPI 并行化，将求解区域分块以分布式计算、分布式存储。我进行了热泡算例，在 CPU 数量方面，80 个 CPU 最多可加速 24 倍左右，CPU 数量增加基本不降低并行效率；在计算规模方面，网格分辨率越高并行效率越低，但达到 240^3 后并行效率基本不再降低，这块仍需改进。

在模式检验方面，我对热流量方程进行了刚体平流测试，数值频散能控制在允许的范围内；对动力模块做了方腔流测试，结果和前人工作吻合良好。最后，我完成了一个旋转热对流数值模拟算例，模式能模拟出对流爆发过程和其后地涡旋缠卷，不同瑞利数情形下流场差异明显且基本符合认知。接下来考虑做以旋转热对流为背景的临界瑞利数测试。

由于尚未见涡度-速度法应用于地球流体计算的报道。考虑到涡度-速度法在不可压缩流动和非惯性参考系中模拟的潜在优势，我打算用它做一个海洋模式，从刚盖情形做起，未来重点是突破自由面边界条件这一瓶颈（关于自由面附近涡

度的变化可参考 Lundgren, 1990)。

参考文献

- 周全, 夏克青. Rayleigh-Bénard 湍流热对流研究的进展、现状及展望[J]. 力学进展, 2012, 42(3):0-0. DOI:10.6052/1000-0992/11-163.
- 数值传热学/陶文铨编著 .-2 版.-西安: 西安交通大学出版社, 2001.5
- 涡运动理论/童秉刚, 尹协远, 朱克勤著 .-2 版.-合肥: 中国科学技术大学出版社, 2009.1
- 大气涡旋动力学/刘适达, 刘适式著.-北京: 气象出版社, 2011.3
- 高性能计算之并行编程技术— MPI 并行程序设计, 都志辉编著. (中科院大气物理研究所内部资料)
- 高等数学. 下册/李忠, 周建莹编著. -2 版.-北京: 北京大学出版社, 2009.8
- 王佳. 热对流的格子 Boltzmann 模拟研究[D].中国气象科学研究院,2012.
- 黄博. GRAPES 模式中半拉格朗日平流计算方案的改进试验研究[D].中国气象科学研究院,2014.
- 伍湘君. GRAPES 高分辨率气象数值预报模式并行计算关键技术研究[D].国防科学技术大学,2011.
- Julien K , Legg S , McWilliams J , et al . Rapidly rotating turbulent Rayleigh-Bénard convection[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1996, 322: 243-273.
- Marshall J, Schott F. Open-ocean convection: Observations, theory, and models[J]. Reviews of Geophysics, 1999, 37(1):1 - 64.
- Boubnov B M , Golitsyn G S . Experimental study of convective structures in rotating fluids[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1986, 167: 503-531.
- H. Bénard, “ Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide,” Rev. G' en. Sci.pures et appl. 11 (1900) 1261 - 1271 & 1309 - 1328.
- Taylor, G. I. 1923 Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids.?Proc. Roy. Soc.?104, 213 - 218.?
- Nakagawa Y, Frenzen P. A theoretical and experimental study of cellular convection in

- rotating fluids[J]. *Tellus*, 1955, 7(1): 1-21.
- Boubnov B M, Golitsyn G S. Temperature and velocity field regimes of convective motions in a rotating plane fluid layer[J]. *J. Fluid Mech*, 1990, 219: 215-239.
- Kuppens G, Lortz D. Transition from laminar convection to thermal turbulence in a rotating fluid layer[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1969, 35(3):609-620.
- Stevens R J A M, Zhong J Q, Clercx H J H, et al. Prandtl-, Rayleigh-, and Rossby-number dependence of heat transport in turbulent Rotating Rayleigh-Bénard convection[J]. *Physical Review Letters*, 2009, 102(1):529-532.
- Kunnen R P J, Clercx H J H, Geurts B J. Vortex statistics in turbulent rotating convection[J]. *Physical Review E Statistical Nonlinear & Soft Matter Physics*, 2010, 82(3):2431-2443.
- Stevens R J A M, Overkamp J, Lohse D, et al. Effect of aspect-ratio on vortex distribution and heat transfer in rotating Rayleigh-Bénard convection[J]. *Physical Review E*, 2011, 84(5Part2):056313.
- G.02 Veronis. Cellular convection with finite amplitude in a rotating fluid[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1959, 5(3):401-435.
- Vorobieff P, Ecke R E. Vortex structure in rotating Rayleigh-Bénard convection[J]. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 1998, 123(1):153-160.
- Vorobieff P, Ecke R E. Turbulent rotating convection: an experimental study[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2002, 458: 191-218.
- H. K. Versteeg, W. Malalasekera: *An Introduction To Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method* 2nd ed: 北京: 世界图书出版公司北京公司, 2012
- Moin P, Mahesh K. Direct numerical simulation: A tool in turbulence research[J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 1998, 30(5):539-578.
- Shishkina O, Stevens R J A M, Grossmann S, et al. Boundary layer structure in turbulent thermal convection and its consequences for the required numerical resolution[J]. *New Journal of Physics*, 2010, 12(5):3086-3092.
- Stevens R J A M, Lohse D, Verzicco R. Prandtl and Rayleigh number dependence of

- heat transport in high Rayleigh number thermal convection[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 2011, 688(1):31-43.
- P.H.Lauritzen, C.Jablonowski, M.A.Taylor, R.D.Nair : *Numerical Techniques for Global Atmospheric Models: Tutorials*. Heidelberg: Springer Heidelberg Dordrecht London NewYork, 2011
- Anderson J D, Anderson J D. *Computational fluid dynamics : the basics with applications / John D. Anderson*[J]. McGraw-Hill series in mechanical engineering, 1995.
- Computational Performance of the High-Resolution Atmospheric Model FAMIL[J]. *Atmospheric and Oceanic Science Letters*,2012,05:355-359.
- Jc. S, Ks. K. A vorticity - velocity formulation for solving the two-dimensional Navier - Stokes equations[J]. *Fluid Dynamics Research*, 1999, 25(4):195 - 216.
- Liu C H. Numerical solution of three-dimensional Navier - Stokes equations by a velocity - vorticity method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2001, 35(5):533-557.
- Lo D C, Murugesan K, Young D L. Numerical solution of three-dimensional velocity - vorticity Navier - Stokes equations by finite difference method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, 47(12):1469 - 1487.
- Speziale,02Charles02G. On the advantages of the vorticity-velocity formulation of the equations of fluid dynamics[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, 73(87):476 - 480.
- Huang H, Li M. Finite-difference approximation for the velocity-vorticity formulation on staggered and non-staggered grids[J]. *Computers & Fluids*, 1997, 26(1):59 - 82.
- Daube O. Resolution of the 2D Navier-Stokes equations in velocity-vorticity form by means of an influence matrix technique[J]. *Journal of Computational Physics*, 1992, 103(2):402 - 414.

- Pascazio G, Napolitano M. A staggered-grid finite volume method for the vorticity-velocity equations[J]. *Computers & Fluids*, 1996, 25(4):433 - 446.
- Leonard B P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, 1979, 19(1):59-98.
- Staniforth A, Côté J. Semi-Lagrangian Integration Schemes for Atmospheric Models —A Review[J]. *Monthly Weather Review*, 1991, 119(9):2206.
- Cottet G H, Poncet P. Advances in direct numerical simulations of 3D wall-bounded flows by Vortex-in-Cell methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2004, 193(1):136 - 158.
- Mohammadian A, Marshall J. A “vortex in cell” model for quasi-geostrophic, shallow water dynamics on the sphere[J]. *Ocean Modelling*, 2010, 33(3-4):132-142.
- Durrant D R. Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics[J]. *Texts in Applied Mathematics*, 1999.
- Briggs W L, Emden H V, McCormick S F. A multigrid tutorial (2. ed.).[J]. *Society for Industrial & Applied Mathematics Philadelphia Pa*, 2000.
- Hager G, Wellein G. Introduction to high performance computing for scientists and engineers[J]. *International Journal of Modern Physics A*, 2011, 28(2):163-172.
- Theory of Concentrated Vortices: An Introduction. Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg New York, 2007.
- Sakai, S. The horizontal scale of rotating convection in the geostrophic regime[J]. *Journal of Computational Physics*, 1997, .33385 - 95
- Holton J R. An Introduction to Dynamic Meteorology, 4th ed[J]. *International Geophysics*, 2004, 41(5):752-754.
- Wu R, Blumen W. An Analysis of Ekman Boundary Layer Dynamics Incorporating the Geostrophic Momentum Approximation.[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1982, 39(8):1774-1782.

Lundgren T, Koumoutsakos P. On the generation of vorticity at a free surface[J].
Journal of Fluid Mechanics, 1999, 382(5):351-366.

致谢

这篇论文是在王元老师悉心指导下完成的。自大一时认识王老师起，他便鼓励我做一些有“物理味道”的研究。王老师告诉我，做研究做到最后拼的是做人；做研究要“尖”不要“平”；做事不能急，参加比赛前后不要计较成败得失。王老师工作繁忙，但凡是能有机会见面便和我们几个同学讨论问题到深夜。从《演示物理》课到创新计划，再到毕业论文，我见证了大气科学学院学生创新实验室的创立和为生存而做的奋斗。感谢大气所冯士德老师带我们在大气所转盘实验室实习，没有他几年来不间断的指导，流体实验就不会在南京大学大气学院重新扎根。感谢物理学院潘永华老师、高惠滨老师、龚国斌老师和周进老师，他们为建造转盘提供了大量技术指导，并在基础实验楼丙 310 提供了实验场地。感谢和我一起做创新计划的冯志明、刘明睿、浦云娇同学，我们一起拧螺丝、接电线、等刚稳的日子是我大学中最快乐的时光。感谢孙世玮同学，他在大四期间加入实验室，我们一起做实验、处理数据、做演示实验，没有他的支持我估计已经放弃了。感谢宋金杰老师，他敏锐的思考启示我规避了许多弯路。感谢周博闻老师，他从专业计算流体力学角度给了我很多建议。感谢方娟老师，她从《走进风雨》开始就不厌其烦地为我解答了无数问题。感谢潘益农老师、王体健老师、孙鉴泞老师、喻春红老师、江静老师和杨修群老师对学生创新实验室的大力支持，他（她）们从学术和经费方面给了我们许多帮助。感谢汤建平老师借我们一台小超算以及一个服务器账号，我的绝大多数算法调试都在上面完成。感谢孙旭光老师和张熠老师，没有他们热情解答我关于数值预报和动力学的问题，做模式的难度将难以想象。感谢袁慧玲老师、张洋老师和陈宝君老师，他（她）们对实验室发展提了许多建议。感谢大气所吴国雄老师和包庆老师。包老师作为一位模式专家，自从我投到吴老师课题组门下后，便给了我大量做模式的指点，鼓励我用有限体积法做探索，并向我提供了天河-1A 资源进行模式调试。感谢储惠芸老师，在她的劝说下我放弃了转天文系的念头，决心念好气象，几年间给了我很多人生和学问方面

的指导。感谢凯琳姐，她对学生的关怀使我们的生活学习十分顺利。感谢实验室12、13级的小伙伴，他们让实验室热热闹闹。

最后，特别感谢我的家人，他们为我付出了太多。特别感谢我可爱的女友浦云娇，她使我在南大的生活变得如此美好。特别感谢我的铁哥们刘明睿：我们孤胆，我们并肩。