



# 南京大学本科生毕业论文（设计、作品）中文摘要

题目： 正压浅水方程的数值模拟

院系 大气科学学院 专业 大气科学 级本科生姓名：韩轶伦

指导教师（姓名、职称）：周博闻，副教授

摘要：Rossby 波是由于  $\beta$  效应而产生的大气基本波动，其理论对于天气、气候学研究都有着深远的影响。地形  $\beta$  效应是实验中模拟行星 Rossby 波的可行方案。本文主要记述了通过正压浅水方程组建立相应的二维极坐标数值模式，对于地形扰动所生成的地形 Rossby 波动进行模拟，与地球流体力学实验结果进行参照。此外对这种地形 Rossby 波动与行星 Rossby 波动进行对比，探究其中的物理特征。

关键词：Rossby 波动；地形  $\beta$  效应；正压浅水方程

## 南京大学本科生毕业论文（设计、作品）英文摘要

THESIS: Shallow Water Equations and Its numerical Simulation

DEPARTMENT: The School of Atmospheric Science of Nanjing University

SPECIALIZATION: Atmospheric Science

UNDERGRADUATE: Yes

MENTOR: Zhou Bowen

ABSTRACT: Planetary Rossby waves are driven by the beta effect which approximates the linear meridional change of the Coriolis parameter. This is a basic concept in both atmospheric and climate sciences and has a wide range of applications. At the same time, by the conservation of potential vorticity, the topographic beta effect can be used to mimic the effects of planetary Rossby waves. In this thesis, the numerical methods for the 2D shallow water equations are introduced in the first part. This barotropic model is able to successfully simulate not only topographic Rossby waves but also the planetary ones. Then the results of the numerical simulations are presented in details in the second part. The results of both the topographic and planetary waves are compared with each other to examine the differences between these two kinds of Rossby waves. These results are also compared to the results from existing literature. The physical mechanisms behind these phenomena like how the waves are maintained and how the waves propagate are discussed towards the end of this thesis.

KEY WORD: planetary Rossby wave; topographic beta effect; shallow water model

# 目录

一、 研究背景 .....	1
二、 基本原理分析.....	3
三、 实验方案 .....	5
四、 模式基本构建.....	8
(一) 基本方程组与广义坐标系.....	8
(二) 讨论差分格式稳定性.....	9
(三) 实验差分格式的选择.....	13
(四) 守恒性.....	19
五、 结果展示与分析.....	20
(一) 结果展示 .....	20
(二) 与行星 Rossby 波对比 .....	28
(三) 与流体力学实验对比.....	32
(四) 小结.....	35
六、 实验现象的理论分析与展望 .....	36
(一) Rossby 波的激发与维持机制 .....	36
(二) Rossby 波动的切向传播 .....	38
(三) Rossby 驻波径向分布与传播 .....	49
七、 总结 .....	44
参考文献.....	49
致谢.....	50

---

## 一、 研究背景

正压浅水方程是一个研究中纬度中层大气正压运动的经典方程,它是由一般流体运动方程,在均值不可压的假设之后,得到的可以描述整个三维场运动的二维方程组。在这种假设下整个流场在三维上成准二维运动,不同高度层上运动均匀一致。在实验室中水槽实验可以较好的模拟这样的运动。这正是由于水的比热容大,热膨胀系数小,基本满足均质不可压条件。正因如此正压浅水方程在水文和海洋等学科中运用很广泛,同时在地球流体力学实验中也被广泛用于模拟大气运动。

在上个世纪 60 年代到 80 年代 Arakawa 与其他学者先后创建了基于正压涡度方程、正压浅水方程的有限差分格式,并提出了能量守恒的差分方案,在当时数值预报地转适应和地转演变的过程中起到了关键作用。

正压浅水方程在研究大地形对于行星 Rossby 波的激发与维持的研究中有明显的优势 (Arakawa, 1981)。在本论文中同样可以体现出,这样的浅水波动方程,尤其是 1981 年 Arakawa 等提出的位涡、质量守恒的差分方案对于位涡  $q = \frac{f + \zeta}{h}$  ( $f$  为背景科氏参数,  $\zeta$  为相对涡度,  $h$  为液体厚度) 有着很好的守恒性,所以本文就在这里运用浅水波动方程对于位涡守恒所引起的 Rossby 波的生成与传播进行探究。

地球是以南北极为轴自传的一个球体,这就产生了著名的、在地球流体力学中起着至关重要作用的科氏力,而且这种科氏力随纬度变化,遵循公式

$$\beta = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2\Omega \cos \varphi_0}{a} \quad (a \text{ 为地球半径, } \Omega \text{ 为地球转速, } \varphi_0 \text{ 为 } \beta \text{ 平面所在纬度})。$$

在地球上,科氏力由北极的  $2\Omega$  变为赤道的  $0$  再变为南极的  $-2\Omega$ 。在正压位涡守恒中  $h$  不变的情况下  $f, \zeta$  二者反向变化,也就是说背景涡度变化引起相对涡度变化。如果有南北方向上的扰动产生就可以激发出大家都所熟知的 Rossby 波。

与此同时也可以进行这样的一个实验,及用水代替大气,在旋转的水槽中我们不能改变背景科氏参数,只能改变液柱高度  $h$ 。但是只要装置设置得当,我们依然可以通过位涡守恒产生与行星 Rossby 波相似的地形 Rossby

波动，通过这样的地形 Rossby 波的实验模拟，可以简洁的探究行星 Rossby 波的物理机制的核心。Rossby 波的实验模拟在上世纪六十年代的欧美学者中有所涉及，另外中国海洋大学，以及南京大学大气科学学院也尝试类似的实验做了很多有意义的工作。本文在比较实验结果的基础上，运用广义坐标系下的正压浅水波动方程（主要运用极坐标系下的形式）在一定程度上模拟流体水槽实验的结果。

之前并没有对于这样一个地球流体实验开发一个简洁的数值模拟方案。虽然类似的有边界层绕山气流、涡旋的模拟，但这些数值模拟大多采用完全不可压的涡度方程进行模拟，虽然涡度方程可以略去惯性重力外波的作用重点关注在 Rossby 波的生成和传播上。相反，正压浅水方程有着更贴近真实大气运动的物理意义，使得该模式的通用性得到提高。

## 二、基本原理分析

在分析地形 Rossby 波以及行星 Rossby 波时，我们通常将如下正压浅水方程化为涡度方程的形式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -g \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0\end{aligned}$$

对上面三式化简可得如下涡度方程：

$$\begin{aligned}\frac{d\zeta}{dt} &= -\beta v + \frac{f}{h} \frac{dh}{dt} \\ \frac{d\zeta}{dt} &= -\beta v + \frac{f}{z - z_s} \frac{d(z - z_s)}{dt} = -\beta v + \frac{f}{z} \left( 1 + \frac{z_s}{z} \right) \left( \frac{dz}{dt} - \vec{V} \cdot \nabla z_s \right)\end{aligned}$$

其中可以认为，水

表面的变化相比较小，与地形的平流项  $\vec{V} \cdot \nabla z_s$  相比可以略去，为了方便研究将分母上的  $z$  设置为一个平均水深  $D$ ，这样上述方程就变为：

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\beta v - \frac{f}{D} \vec{V} \cdot \nabla z_s$$

Hoskins 在他的中尺度大气流体动力学一书中将上述方程无量纲化，分别阐述了  $\beta$  效应与地形作用所造成影响的关系。由于采用的方程是从浅水波动方程出发的，边界层的 ekman 抽吸项也就是旋转减弱项就没有出现在上述方程中。无量纲化之后的方程为：

$$\frac{d\zeta}{dt} = -(Be)v - (Hi)\vec{V} \cdot \nabla z_s \quad (\text{Hoskins et al., 2014})$$

其中第一个无量纲数为 beta 数  $Be = \frac{\beta L^2}{U}$  反映了  $\beta$  效应的大小，另外一个

$Hi = \frac{fL}{UD}$  为 Hide 数是 Hide 于 1961 年提出的。

在没有  $\beta$  效应的情况下可简化为  $\frac{d}{dt}(\zeta + Hiz_s) = 0$  假设气流初始涡度为零爬上了一个圆柱形平台，那么就会产生一个负涡度。无量纲数  $Hi$  的大小决定了这样的负涡度涡旋是否会向下游传播。当  $Hi$  很大突破临界值时（如对于正圆柱地形的临界值是 2.0，三角正弦函数型圆锥的临界值为 6.0），激发的负涡度中心无法顺利向下游传播。在数值试验中采用的  $Hi=0.9, Be=3.0$ 。

再这样的一组无量纲数下，地形所激发的若干涡度中心可以自由的向下游传播。(Hoskins et al., 2014)。与此同时在  $\beta$  平面下或者等效的地形  $\beta$  平面下，向下游传播的涡度中心会与背景场作用出一系列的波动。其中了快波以惯性重力波为主，而慢波主要是以 Rossby 波或者地形 Rossby 波动为主。惯性重力外波在通过一个显著的山地之后就会表现出来，其传播速度非常快可用  $C_p = \pm\sqrt{f^2 + gH}$  表示其速度大约为 1.88m/s (转盘转速为 6s/cycle)。相速度很快且双向传播在半径 0.6m 的区域 1s 左右就可环绕一周 (双向)。之后就会出现一系列的 Rossby 波，主要为 beta 效应强迫产生。如果是科氏力参数  $f$  随半径变化则可以认为是行星 Rossby 波动，随半径变化的地形造成的相对涡度变化而产生的 Rossby 波动则认为是地形 Rossby 波，表达式为  $\beta = \frac{f}{H} \frac{\partial z_s}{\partial r}$  (H 为液面平均厚度，f 为科氏参数， $z_s$  为地形高度)。其相速度为  $C_{p\omega} = \omega - \frac{\beta}{k^2 r}$  群速为  $C_{g\omega} = \omega + \frac{\beta}{k^2 r}$ 。其中以群速传播为主，而且最主要的能量集中在驻波  $k_s = \sqrt{\frac{\omega r}{\beta}}$  上。之后会详细的展开讨论。

### 三、 实验方案

地球流体力学实验中我们用旋转的水槽来模拟地球的科氏力。但是在实验室的条件下无法人为使科氏力随半径变化，添加斜面地形通过地形随半径的变化，运用位涡守恒的方式产生地形 Rossby 波来模拟行星 Rossby 波动是实验室进行 Rossby 波动模拟的可行方案。地形产生的 beta 效应在前文有过说明。在模拟背景西风基流时，用以一定速度逆时针旋转转盘达到刚性稳定之后，再减速产生逆时针方向上的等角速度的背景基流，例如速度差在实验中取  $0.105\text{rad/s}$  或  $0.206\text{rad/s}$ ，减速后转速一般为  $0.733\text{rad/s}$ 。（周昂 卓静怡，2016）下图为实验水槽设计图和在锥面地形之上添加的地形扰动的示意图。

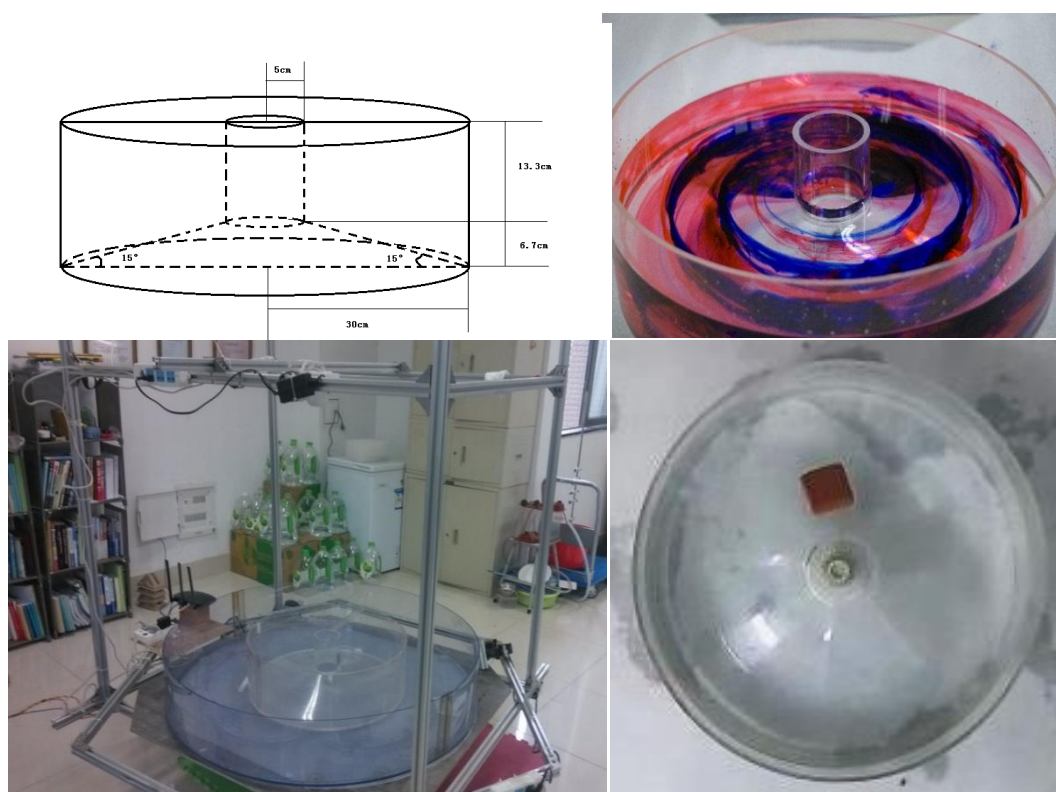


图 1，实验左上图为实验所用水槽的设计图，右上图为真实的水槽（水槽高 20cm，半径 30cm 底面锥面的底角为 15 度，内半径为 5cm），左下图为水槽在盛满水的情况下在在转盘上的实验演示图，右下图为水槽中添加扰动源的水槽示意图。

在这样的水槽的不同半径位置均可添加直径 2~4cm 大小的用特殊橡皮泥制成的扰动源，这样他们就可以在背景基流中为 Rossby 波提供外强迫，

之后会对实验结果进行讨论。

建立数值模式对该转盘进行数值模拟，以期模拟出实验现象。在数值模式先按照旋衡风的公式建立自由面高度与切向速度平衡的初始场尽量让法向速度为零（在后文模式的初始场中有较详细的讨论），例如数值实验中  $\Delta\omega$  可以取 0.0063rad/s、0.0126rad/s、0.0189rad/s、0.0252rad/s，减速之后的稳定转速  $\omega$  为 0.6283rad/s，与流体实验相近，但是在速度差  $\Delta\omega$  上模式与实验有差距。数值模式中主要是出于对于稳定性的考虑选取的  $\Delta\omega$  较小，而现实的实验中由于受到侧边界摩擦、底面摩擦、流体粘性三个方面的能量损失，在减速之后流体会很快向的稳定转速趋近，这样创造的背景基流就会逐渐减弱甚至消失。南京大学周昂等在其实验中阐述了这一速度衰减关系认为可以用经验公式  $\Delta\omega' = k\Delta\omega$  认为 k 可以取 0.28。虽然这一经验公式还有待进一步的探究，但是其明确表示了速度确实存在很大的衰减。那么为了保证背景基流的量级，将角速度差选得很大也就是自然地选择了，并且如果乘以比例系数 k，这样实验与数值模式角速度差的大小量级是相同的。

在模式地形选取上考虑到对 Rossby 波长时间的积分的稳定性，选取的地形大小和形状必须谨慎。在模式中建立如实验一样的圆锥形底面，并在基础上添加地形扰动，或是随半径改变科氏力参数 f 的大小，就可以在圆环形水槽区域内实现对于地形 Rossby 波，或是行星 Rossby 波的模拟。

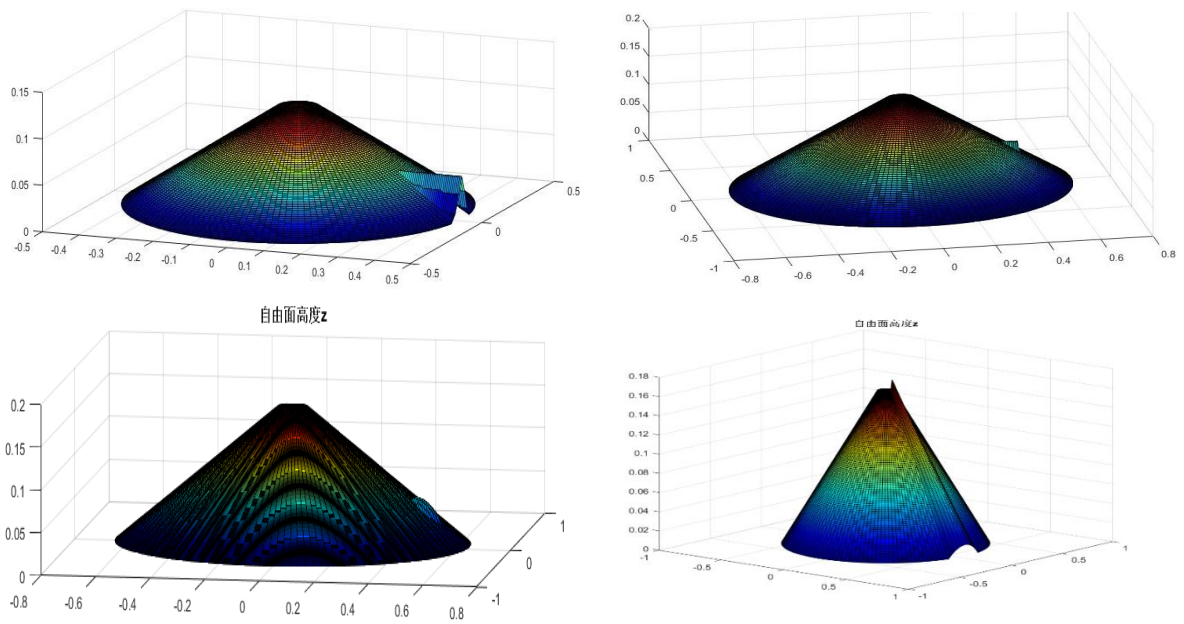


图 2，四幅图都是半径为 60cm 的圆锥形底面，底角均为 15 度四幅图分别代表了四种扰动地形，左上为体积较大的三棱锥，右上为体积较小三棱锥，左下为高度按照指数形式分布的山地，右下为在所有半径出添加的三角函数形的凸起。

不同的扰动源对于模式模拟的稳定性与准确性都有影响，产生的地形 Rossby 波的结果也有不同，在探究产生 Rossby 波数与地形扰动原位置关系时就会提到。

#### 四、 模式的基本构建

##### (一) 基本方程组与广义坐标系

采用了极坐标系下的正压浅水波动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} - fv = -g \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} + fu = -\frac{g}{r} \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial h}{\partial \theta} + h \left( \frac{1}{r} \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) = 0 \end{cases}$$

转换为广义坐标系下的正压浅水波动方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{H_1} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \left[ f - \left( \frac{u}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} - \frac{v}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial r} \right) \right] + \frac{g}{H_1} \frac{\partial z}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{H_1} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{H_2} \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \left[ f - \left( \frac{u}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} - \frac{v}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial r} \right) \right] + \frac{g}{H_2} \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \text{ 根据} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u}{H_1} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v}{H_2} \frac{\partial h}{\partial \theta} + h \left( \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2 u}{\partial r} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1 v}{\partial \theta} \right) = 0 \end{cases}$$

拉密算符定义:

$$H_1 = \frac{dl_r}{dr} = 1, H_2 = \frac{dl_\theta}{d\theta} = r$$

利用地图放大倍数

再这样的情况下如果用  $r$  充当  $y$  轴用  $\theta$  充当  $x$  轴, 所以  $dx = dr, dy = d\theta$

因为地图投影的定义:  $m = \frac{dx}{dl_x}, n = \frac{dy}{dl_y}$

$l_x, l_y$  分别为  $x, y$  轴表示的实际距离

$$\text{因此有 } l_x = l_r, l_y = l_\theta, m = \frac{1}{H_1} = 1, n = \frac{1}{H_2} = \frac{1}{r}$$

这样原始方程组可以写成带地图投影的形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + mu \frac{\partial u}{\partial r} + nv \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \left[ f - mn \left( u \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{m} \right) - v \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{n} \right) \right) \right] + mg \frac{\partial z}{\partial r} = 0 \dots\dots\dots(1) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + mu \frac{\partial v}{\partial r} + nv \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \left[ f - mn \left( u \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{m} \right) - v \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{n} \right) \right) \right] + ng \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots(2) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + mu \frac{\partial h}{\partial r} + nv \frac{\partial h}{\partial \theta} + mn h \left( \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{n} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{v}{m} \right) \right) = 0 \dots\dots\dots(3) \end{cases}$$

改写成通量形式的方程组 (1)\*h+(3)\*u,(2)\*h+(3)\*v

$$\begin{aligned}
 f^* &= f - mn(u \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{1}{m}) - v \frac{\partial}{\partial r} (\frac{1}{n})) \\
 \left\{ \begin{aligned}
 &h \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial t} + mhu \frac{\partial u}{\partial r} + nhv \frac{\partial u}{\partial \theta} + mnu(\frac{u}{n} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v}{m} \frac{\partial h}{\partial \theta} + h(\frac{\partial}{\partial r} (\frac{u}{n}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{v}{m}))) \\
 &- f^* hv + mgh \frac{\partial z}{\partial r} = 0 \\
 &h \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial t} + mhu \frac{\partial v}{\partial r} + nhv \frac{\partial v}{\partial \theta} + mnv(\frac{u}{n} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v}{m} \frac{\partial h}{\partial \theta} + h(\frac{\partial}{\partial r} (\frac{u}{n}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{v}{m}))) \\
 &+ f^* hu + ngh \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \\
 &\frac{\partial h}{\partial t} + mn(\frac{u}{n} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{v}{m} \frac{\partial h}{\partial \theta} + h(\frac{\partial}{\partial r} (\frac{u}{n}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{v}{m}))) = 0
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

进上式可化简为

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\frac{\partial hu}{\partial t} + mn[\frac{\partial}{\partial r} (u \frac{hu}{n}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v \frac{hu}{m})] - f^* hv + mgh \frac{\partial z}{\partial r} = 0 \\
 &\frac{\partial hv}{\partial t} + mn[\frac{\partial}{\partial r} (u \frac{hv}{n}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v \frac{hv}{m})] + f^* hu + ngh \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0 \\
 &\frac{\partial h}{\partial t} + mn[\frac{\partial}{\partial r} (\frac{hu}{n}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{hv}{m})] = 0
 \end{aligned} \right.$$

变为通量格式的差分方程（田永祥 等，2010）

$$\left\{ \begin{aligned}
 &\overline{hu}_i^t + m_{i,j} n_{i,j} [\overline{u}^r (\frac{hu}{n}) ]_r + [\overline{u}^\theta (\frac{hv}{m}) ]_\theta - f^* h_{i,j} v_{i,j} + m_{i,j} g h_{i,j} \overline{z}_r = 0 \\
 &\overline{hv}_i^t + m_{i,j} n_{i,j} [\overline{v}^r (\frac{hu}{n}) ]_r + [\overline{v}^\theta (\frac{hv}{m}) ]_\theta + f^* h_{i,j} u_{i,j} + n_{i,j} g h_{i,j} \overline{z}_\theta = 0 \\
 &\overline{h}_i^t + m_{i,j} n_{i,j} [(\frac{hu}{n})_r + (\frac{hv}{m})_\theta] = 0
 \end{aligned} \right.$$

## (二) 讨论差分格式稳定性

先将方程线性化之后，在带入标准波形解。为了与径向变元 i 作区分，虚部为大写 l，往后有可能不一致

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} UB^{n\Delta t} e^{I(ki\Delta r + lj\Delta \theta)} \\ VB^{n\Delta t} e^{I(ki\Delta r + lj\Delta \theta)} \\ HB^{n\Delta t} e^{I(ki\Delta r + lj\Delta \theta)} \end{pmatrix}$$

在时间上选用欧拉后插，可得差分方程如下  $\bar{h}$  为整个流场的平均高度

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} - fv_{i,j}^{n+1} + m_{i,j}g \frac{z_{i+1,j}^{n+1} - z_{i-1,j}^{n+1}}{2\Delta r} &= 0 \\ \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} + fu_{i,j}^{n+1} + n_{i,j}g \frac{z_{i,j+1}^{n+1} - z_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta\theta} &= 0 \\ \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + m_{i,j}n_{i,j}\bar{h}\left(\frac{n_{i+1,j}}{2\Delta r} - \frac{n_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{m_{i,j+1}}{2\Delta\theta} - \frac{m_{i,j-1}}{2\Delta\theta}\right) &= 0 \end{aligned}$$

将标准波形解带入略去地形效应（也就是  $h=z$ ），之后同时除以

$e^{I(ki\Delta r + lj\Delta\theta)}$  可得到方程组

$$\begin{cases} U \frac{1-B^{-1}}{\Delta t} - Vf + H \frac{Ig}{\Delta r} \sin k\Delta r = 0 \\ V \frac{1-B^{-1}}{\Delta t} + Uf + H \frac{Ig}{r\Delta\theta} \sin l\Delta\theta = 0 \\ H \frac{1-B^{-1}}{\Delta t} + U\left(\frac{I\bar{h}}{\Delta r} \sin k\Delta r + \frac{\bar{h}}{r} \cos k\Delta r\right) + V\left(\frac{I\bar{h}}{r\Delta\theta} \sin l\Delta\theta\right) = 0 \end{cases}$$

得到方程（上面方程组中运用了  $m=1, n=\frac{1}{r}$ ）:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-B^{-1}}{\Delta t}\right)^2 - \frac{f^2}{r^2} - \frac{g\bar{h}}{r} \left(\frac{1}{\Delta r^2} \sin^2 k\Delta r + \frac{1}{r^2\Delta\theta^2} \sin^2 l\Delta\theta\right) &= 0 \\ -f \frac{g}{r\Delta\theta} \sin l\Delta\theta + \frac{g\bar{h}}{r} \left(\frac{1}{\Delta r} \cos k\Delta r + \frac{1}{r} \cos l\Delta\theta\right) &= 0 \end{aligned} \quad \text{进一步}$$

步化简得到

$$\begin{cases} \left(\frac{1-B^{-1}}{\Delta t}\right)^2 = -[f^2 + g\bar{h}\left(\frac{1}{\Delta r^2} \sin^2 k\Delta r + \frac{1}{r^2\Delta\theta^2} \sin^2 l\Delta\theta\right)] \dots \text{实部方程} \\ \left(\frac{1-B^{-1}}{\Delta t}\right) = -\frac{f\Delta r \sin l\Delta\theta}{r\Delta\theta \sin k\Delta r} \dots \text{虚部方程} \end{cases} \quad \text{设}$$

$$\Omega_1^2 = f^2 + g\bar{h}\left(\frac{1}{\Delta r^2} \sin^2 k\Delta r + \frac{1}{r^2\Delta\theta^2} \sin^2 l\Delta\theta\right), \quad \Omega_2 = \frac{f\Delta r \sin l\Delta\theta}{r\Delta\theta \sin k\Delta r} \text{ 由实部方程可得}$$

$$B_1 = \frac{1}{1 \mp i\Delta t \Omega_1}; \quad \text{虚部方程可得 } B_2 = \frac{1}{1 + \Delta t \Omega_2}$$

可以说对于欧拉后插格式实部方程结果肯定是稳定的，但是虚部方程结果由于  $\frac{\sin l\Delta\theta}{\sin k\Delta r}$  正负并不确定，所以要求  $f\Delta t \frac{\Delta r}{r\Delta\theta}$  尽可能的小以保证稳定。另外由于是欧拉后插方程第一步前插估值为绝对不稳定，可能随着积

分估值与真值相差加大导致迭代不收敛。

下面对中央差进行讨论，同上只是将上述时间部分进行替换方程变为：

$$\begin{cases} \left(\frac{B-B^{-1}}{2\Delta t}\right)^2 = -[f^2 + g\bar{h}\left(\frac{1}{\Delta r^2}\sin^2 k\Delta r + \frac{1}{r^2\Delta\theta^2}\sin^2 l\Delta\theta\right)] \dots \text{实部方程} \\ \left(\frac{B-B^{-1}}{2\Delta t}\right) = -\frac{f\Delta r \sin l\Delta\theta}{r\Delta\theta \sin k\Delta r} \dots \dots \dots \text{虚部方程} \end{cases} \quad \text{同样}$$

$$\Omega_1^2 = f^2 + g\bar{h}\left(\frac{1}{\Delta r^2}\sin^2 k\Delta r + \frac{1}{r^2\Delta\theta^2}\sin^2 l\Delta\theta\right), \quad \Omega_2 = \frac{f\Delta r \sin l\Delta\theta}{r\Delta\theta \sin k\Delta r}$$

$$\text{得到方程 } B_1^2 \mp i2\Delta t\Omega_1 B_1 - 1 = 0, \quad B_2^2 + 2\Delta t\Omega_2 B_2 - 1 = 0$$

$$\text{解出 } B_1 = \pm i\Delta t\Omega_1 \pm \sqrt{1 - (\Delta t\Omega_1)^2}, \quad B_2 = -\Delta t\Omega_2 \pm \sqrt{1 + (\Delta t\Omega_2)^2}$$

使  $|B_1| = 1$  这需要  $(\Delta t\Omega_1)^2 \leq 1$  此时

$$\Delta t^2 \leq \frac{1}{f^2 + g\bar{h}\left(\frac{1}{\Delta r^2}\sin^2 k\Delta r + \frac{1}{r^2\Delta\theta^2}\sin^2 l\Delta\theta\right)} \quad \text{分母取最大值时}$$

$$\Delta t^2 \leq \frac{1}{f^2 + g\bar{h}\left(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r^2\Delta\theta^2}\right)} \quad \text{本实验中 } f^2 \text{ 的大小与后一项相比可忽略最后可}$$

大致得到  $\Delta t < 0.005s$ 。其中网格格距越大，平均液面高度越浅，其时间步长可取的越长。

对于虚部得到的方程由于  $\Omega_2$  为正实数，当  $B_2 = -\Delta t\Omega_2 - \sqrt{1 + (\Delta t\Omega_2)^2}$  时，定会有  $|B_2| > 1$ 。所以就要求  $f\Delta t \frac{\Delta r}{r\Delta\theta}$  尽可能的小。

为了精确模拟进一步提高分辨率，在不加入圆锥形底面地形的条件下取  $\Delta r \approx r\Delta\theta \approx 0.005, \bar{h} \approx 0.2$ ，背景转速为 6s/cycle，这种条件下根据理论上  $\Delta t < 0.025s$ 。

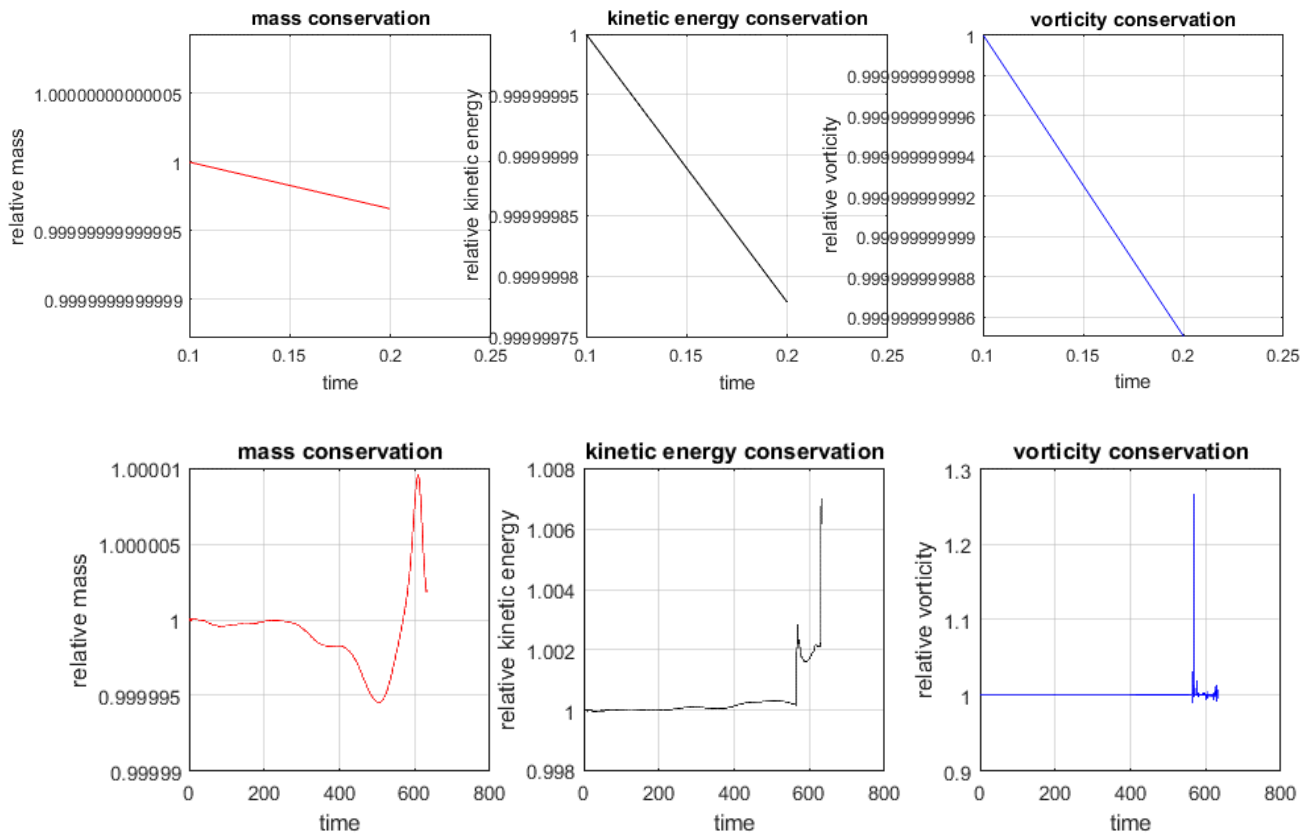


图 3，上一组的三张图为水深  $H=0.2m$ 、时间步长  $dt=0.002s$  时，相对总质量、相对总动能、相对总涡度随时间（单位：秒）变化的情况，下面一组图为水深  $H=0.2m$ ， $dt=0.001s$ ，是与上面相同的三个量随时间变化的情况。

实际上当  $dt=0.0025s$  时只能积分 50 步，不能完成对 Rossby 波这一慢波长达 600s 的模拟，当  $dt=0.002s$  时，可以进行 100 步积分，也不能完成计算。当  $dt=0.001s$  时，可以进行正常的运算在进行到 620s 时，能对实验现象进行模拟，但是还是出现了数据的迭代溢出，之后出现不稳定性。所以说在极坐标系下，上文稳定性讨论中虚部 B2 造成的误差增长依然是非常可观的。

接下来根据公式  $\Delta t^2 \leq \frac{1}{f^2 + g\bar{h}(\frac{1}{\Delta r^2} + \frac{1}{r^2\Delta\theta^2})}$  当我们升高平均液面深度

$H=0.4m$  时其理论上  $\Delta t \leq 0.0018s$  , 这里还用步长为  $0.001s$  进行积分我们得到如下结果。

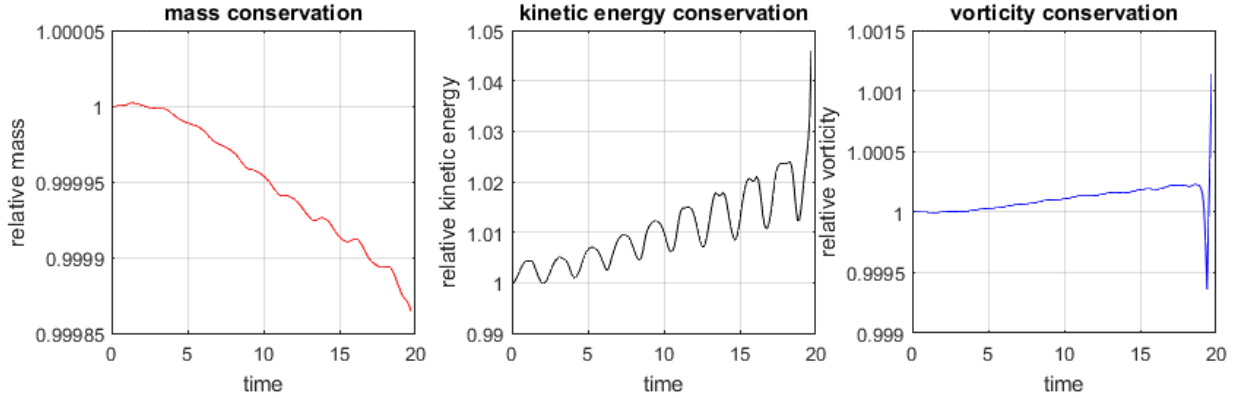


图 4，以上三幅图为在  $H=0.4m$ ， $dt=0.001s$  的条件下，相对总质量，相对总动能，相对总涡度随时间变化的结果。

我们看到由于  $c = \sqrt{f^2 + gH}$  液面升高之后惯性重力外波的速度是原来的  $\sqrt{2}$  倍，稳定的时间步长也有所缩短。如果要进行两分钟以上时间的模拟还是要讲时间步长控制在理论限制的 50% 以下。另一方面为了确保模拟稳定进行，就应当限制就重力外波的传播也就是再设定初始场时液面不应过高。所以在本文的数值模式中所采用的时间步长为  $0.0005s$

### (三) 实验差分格式的选择

直接采用 A 网格通量格式可以较好的描述浅水重力惯性表面波，但是其计算误差大且稳定性较差，不能进行长时间的积分。由于要模拟的 Rossby

波群速较小，按照角速度计算为  $C_{g\omega} = \omega + \frac{\beta}{ks^2r}$ ,  $ks = \sqrt{\frac{\beta}{u}}$ ,  $C_{g\omega} = 2\omega$  在上文选

取的几个实验的转速差下，准静止波的最大群速度为  $0.0504rad/s$  至少需要  $120s$  的模拟时长，才能对现象进行有效地模拟，一般来讲根据上文稳定性的讨论，要想进行长时间的模拟其时间步长要小于理论值的 50%。在这个模式下径向分辨率  $\Delta r = 0.005m$ ，切向分辨率为  $\Delta\theta = 2\pi/144rad$ ，换算成长度范围在  $2.2 \times 10^{-3}m \sim 2.8 \times 10^{-3}m$ 。在这种条件下实际上的时间步长选用

$dt=0.0005s$ ，其中很大一部分也是为了准确性的考虑。这样的话就必须进行至少 240,000 步的积分，在有些组的数值实验中甚至需要积分 1000,000 步及以上，这就对于空间和时间的守恒性有着很高的要求。

本文采用总动能、总涡度拟能守恒的正压浅水方程，可以比较好的模拟正压均质流体通过不同地形所激发和维持的 Rossby 波动。如果选用其他的方程以及差分形式如果不对格式进行特殊处理，往往尽管总能量守恒，但是涡度拟能不守恒，出现很强的能量串级，能量在长时间的积分之后集中在空间最小分辨尺度的波动，这时舍入误差就不能忽略。长时间进行积分会严重影响结果甚至造成不稳定。例如选用正压涡度方程在雅可比项处理时就会出现在动能，涡度拟能守恒性上不能全面满足的情况（Arakawa, 1966）

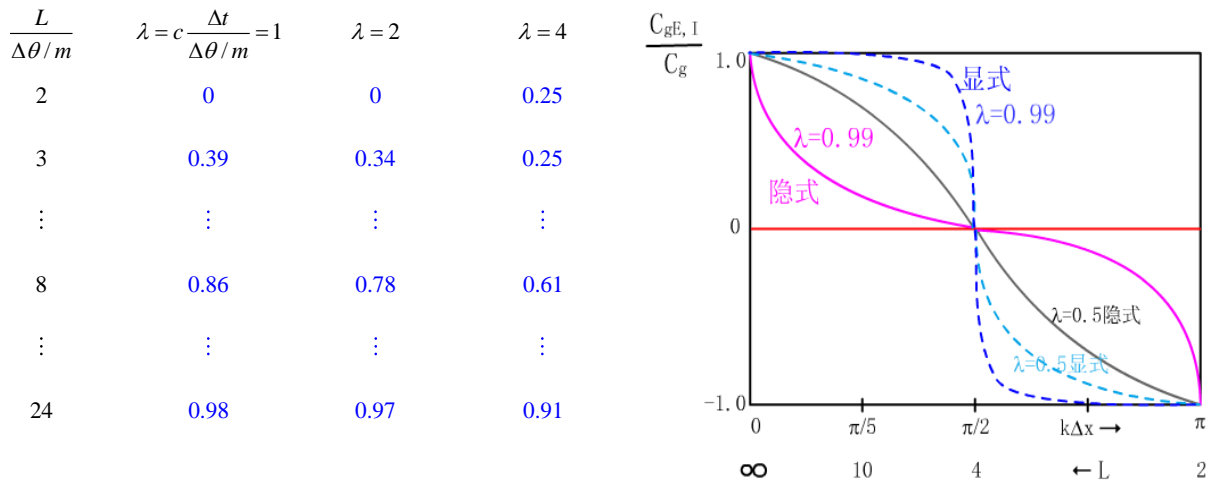


图 5，左图该表表示了隐式差分格式下，在一定  $\lambda = c \frac{\Delta t}{\Delta\theta/m}$  和  $\frac{L}{\Delta\theta/m}$  的模式模拟处的相速度与真实的相速度的比值，右图为模式模拟群速度与真实群速度的比值，其中不同颜色的线代表不同的  $\lambda$  的值，激发的 Rossby 波的  $\frac{L}{\Delta\theta/m}$  一般为 14 左右（也就是一圈十个波长），虽然在左边的表格和右图中都可以观察到相速度和群速度的衰减很少。但是在上文提到的几十万次的数值积分之后，每次一点点的衰减都会造成结果的很大的影响，这样我们取  $dt=0.0005$ ，这样在这里整个场平均的  $\lambda = c \frac{\Delta t}{\Delta\theta/m} = 7 \times 10^{-4}$  这样的情况下就会是每一步的衰减尽可能的少，但具体的  $\lambda$  减小对于群速和相速度的衰减不具体讨论，一般认为  $L > 10r\Delta\theta$  就可以较准确的模拟。（孙旭光，2015）

为了使方程具备更好的守恒性，这里我们进行一定的推导变换得到采用

C 网格下的总质量、总涡度拟能守恒方程。下面是 C 网格下变量的分布以及在此分布下具体的差分方程。

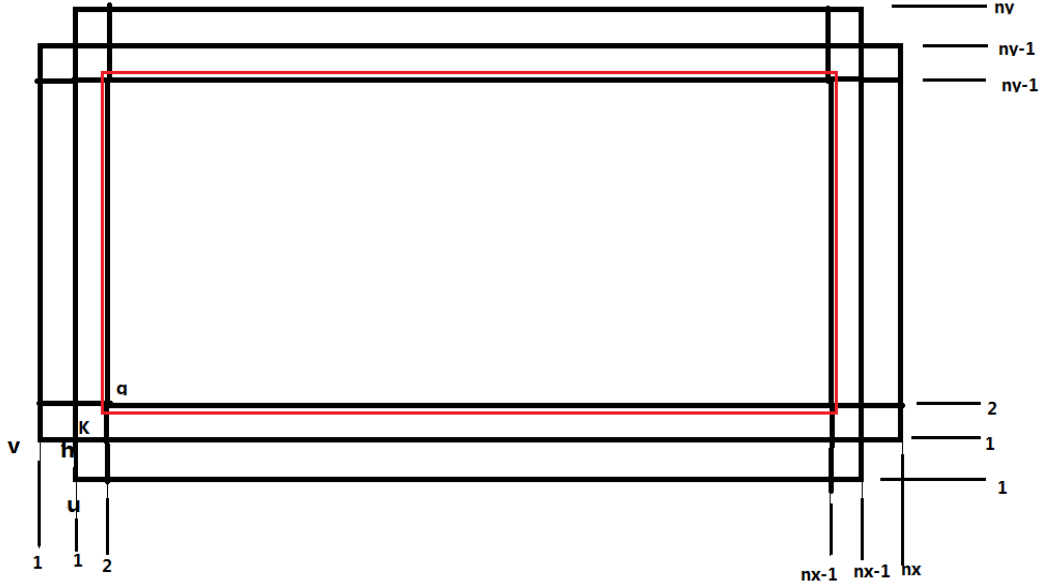


图 6, C 网格变量分布形式其中  $u$  为径向速度,  $v$  为切向速度,  $h$  为局地液面厚度,  $K$  为动能,  $n_x$  为切向格点数 (弧度制),  $n_y$  为径向格点数。红色边框区域内是模拟的真实区域。

标准的模式方程组为

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v}{m} \right) + (z + K)_\theta + \bar{q}^r \left( \frac{U}{m} \right)^{\theta r} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u}{m} \right) + (z + K)_r - \bar{q}^\theta \left( \frac{V}{n} \right)^{\theta r} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{z}{mn} \right) + \left( \frac{U}{m} \right)_r + \left( \frac{V}{n} \right)_\theta = 0$$

其中:

$$U = \bar{h}^r u, V = \bar{h}^\theta v$$

$$K = \frac{1}{2} mn \left[ \left( \frac{u}{mn} \right)_r + \left( \frac{v}{mn} \right)_\theta \right]$$

$$q = \left( \frac{mn}{\phi} \right)^{\theta r} \frac{f + \zeta}{mn}$$

$$\zeta = mn \left[ \left( \frac{v}{m} \right)_r - \left( \frac{u}{n} \right)_\theta \right]$$

其中  $u, v$  与全球模式的  $u, v$  命名方式不同主要是考虑到柱坐标系下的

变量命名习惯。

本模式采用了时间上欧拉后插迭代，空间上总质量、总涡度拟能守恒的差分方程。另外其形式为广义坐标系形式，通过改变局地放大系数  $m$ ,  $n$  来表示广义坐标系下的拉密算符， $m = \frac{1}{a \cos \varphi}$ ,  $n = \frac{1}{a}$  就可以完成柱坐标系和球坐标系之间的转换。加入标准 Haurwitz 初始场 (Phillips, 1959)。下面两组图是模式运行结果。

在转换到全球模式时，由于既没有高纬滤波也没有极点处理，所以积分的区域为南北纬 70 度以内，径向 360 度，空间分辨率为 5 度，时间分辨率为 150s。从上图看来在积分十八天 41472 步之后依然可以较好的保持初始的形状。

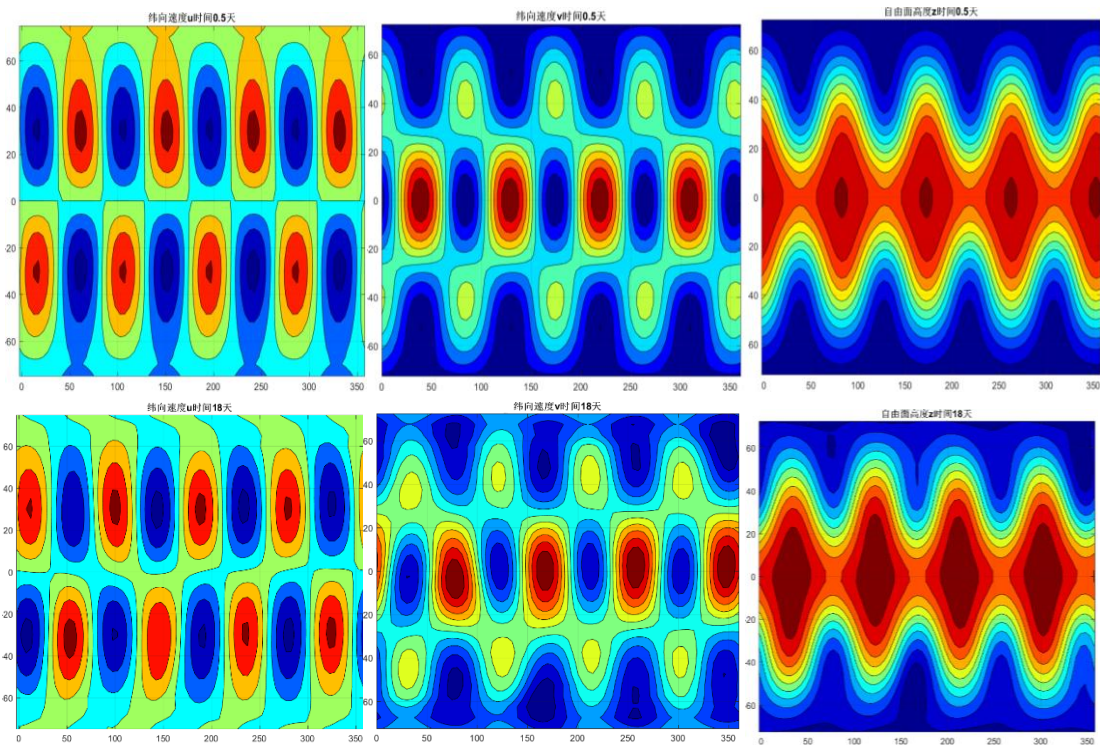


图 7，上三幅图为标准 Haurwitz 出初始场的结果左中右分别为经向风场（量级 10m/s）、纬向风场（量级 10m/s），高度场（量级 8000m），下三幅图为积分 18 天后的结果。

### (三) 实验的初值条件与边界条件

为了使能量守恒并且是准确的模拟真实流体实验中的边界，模式在侧边界处也就是图 6 上下两个边界处采用固壁边界条件。

$$z_{n+1}|_{r=r_2} = z_n - \Delta t \frac{1}{r} \frac{\partial h_n v_n}{\partial \theta} = z_n - \Delta t m n \frac{\partial V}{\partial \theta}, V = v h$$

$$u_{n+1}|_{r=r_2} = 0, u_{n+1}|_{r=r_2+\Delta r} = -u_{n+1}|_{r=r_2-\Delta r}$$

$$v_{n+1}|_{r=r_2+\Delta r/2} = \Delta \Omega r_2 - v_{n+1}|_{r=r_2-\Delta r/2}$$

可以看出在边界处设定径向速度  $u$  为零，自由面高度以切向速度  $v$  的大小平流。

本模式的核心目的就是为了探究理想情况下在以地形  $\beta$  效应模拟行星  $\beta$  效应的浅水水槽中，在特定地形扰动下激发 Rossby 波的情况。在实验中一般第一步让转盘以一定速度旋转 10 分钟及以上，第二步按照一定比例减慢转速创造出背景基流。当流体以一定转速达到刚性稳定之后，由于离心的作用往往形成抛物面状的自由液面，在模式添加初始场时如果不能够让切向速度与自由面高度相匹配则往往会产生径向的出流和入流，由于目前还未在方程组中引入粘性系数，结果就会产生比较严重的径向的惯性震荡（通常表现为比较大的径向速度），严重影响对预期现象的模拟。下面就是对于高度场与切向速度匹配的初始场的说明。

根据稳定状态下的极坐标运动方程（此方程为梯度风平衡）

$$\frac{v^2}{r} + f v = g \frac{\partial h}{\partial r}$$

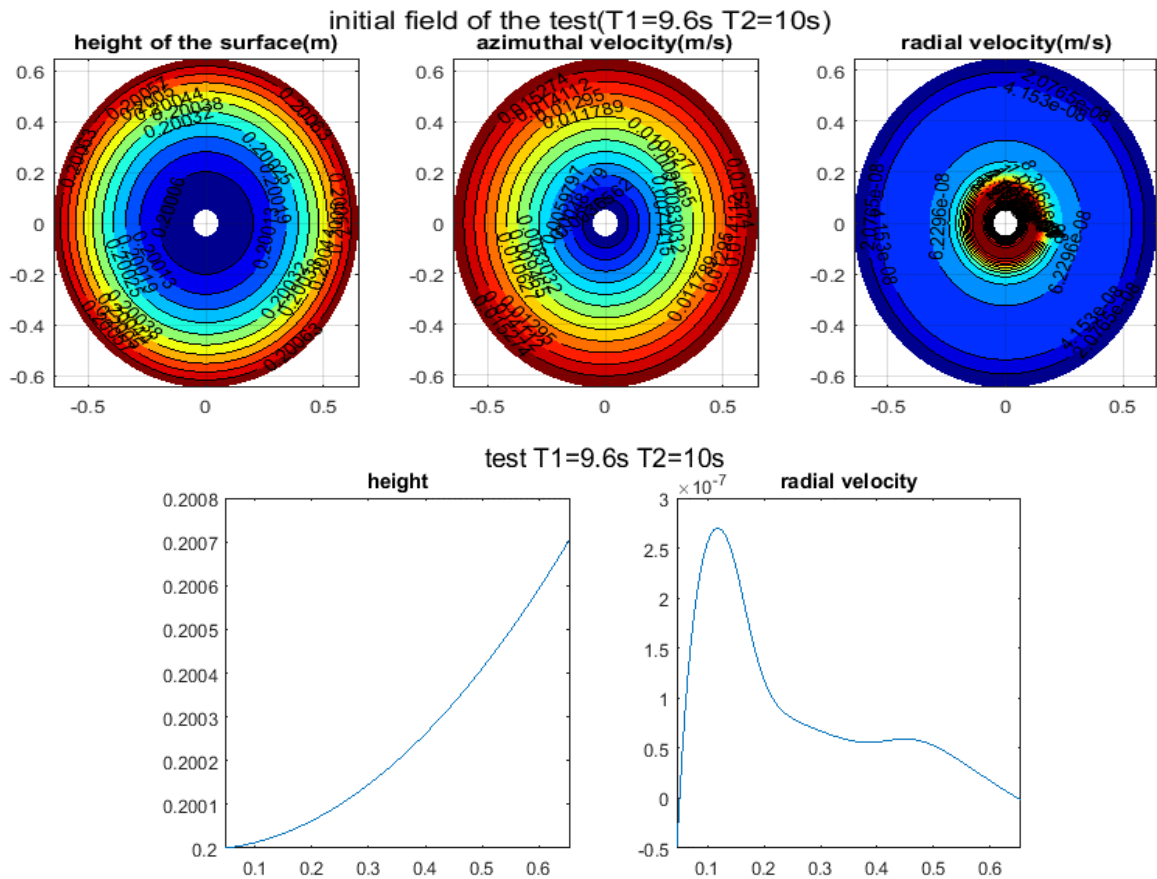


图 8，上图为：减速前周期 9.6s 减速，后周期 10s，平均液面高度 0.2m 的初始场示意图，第一排左中右分别为自由面高度，切向速度，径向速度，第二排分别为自由面高度和径向速度的沿半径的切片，。

对上式进行一定的数学推导，理论的自由液面表达式为抛物面。如图 8 下排左图所示，模式可以添加的抛物型液面是与理论符合并且稳定存在的。

从径向切片的结果可以看到自由液面高度随半径的增加呈抛物线增加，而且径向速度控制在切向速度的 $10^{-5}$ 左右，控制在模拟出的地形 Rossby 波的径向速度的 $10^{-4} \sim 10^{-3}$ ，可以认为在真正的 Rossby 波产生之前，初始场的径向速度为零。

选择合适的地形场至关重要，总的而言在水槽的圆锥形底面任意位置，添加不同形式的扰动地形都可以激发出地形 Rossby 波动。但是不同的地形造成的波动的径向速度大小不同.过大过高的地形，以及坡度过陡的地形都会对很多步数的数值积分的稳定性产生影响。而且当研究产生 Rossby 在的

波长与波数与扰动源位置关系时，过宽和过高的扰动源都会是整场的波动变得复杂不利于研究。

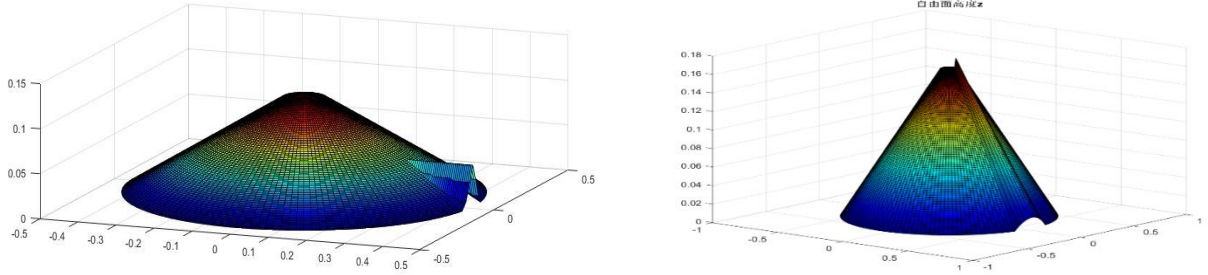


图 9，以上两种地形就不利于激发稳定的地形 Rossby 波动也不利于模式运算的稳定性。

#### (四) 守恒性

在理论上该空间差分格式可以满足总能量、总质量、总涡度守恒。实际结果来看在一定时间内，与理论相符合的情况是比较好的。在众多实验中选取了几组下面是积分 72000 步之后的能量守恒情况。如下图所表现的情况来看，总动能的变化在  $\pm 0.005\%$ ，总涡度拟能的变化在  $\pm 0.004\%$ ，而总质量的变化维持在  $\pm 0.00004\%$  以内，可以看出守恒性是满足要求的质量的守恒性尤为突出是因为采用了没有法相通量的固壁边界条件。

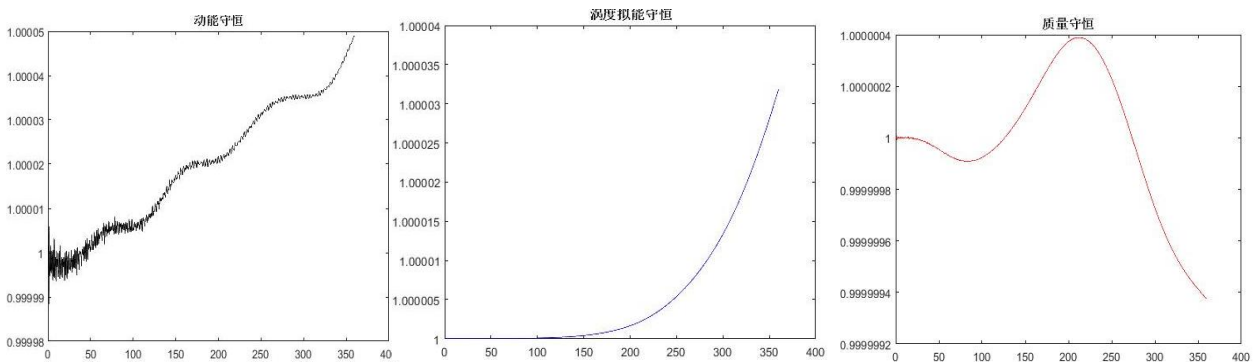


图 10，左中右分别为相对总动能，相对总涡度拟能，相对总质量随时间变化的情况，横轴为时间，纵轴为相对值（算法为后续值除以初始值）。

## 五、 结果展示与分析

### (一)结果展示

采用了径向分辨率 5mm，123 个格点，切向 147 个格点分辨率为  $2\pi/144\text{rad}$ ，模拟的区域内径 5cm，外径 65cm，而实验采用的内径为 5cm，外径为 30cm，模式之所以采用更大的外径是为了尽可能的减小边界对于波动传播造成的影响。

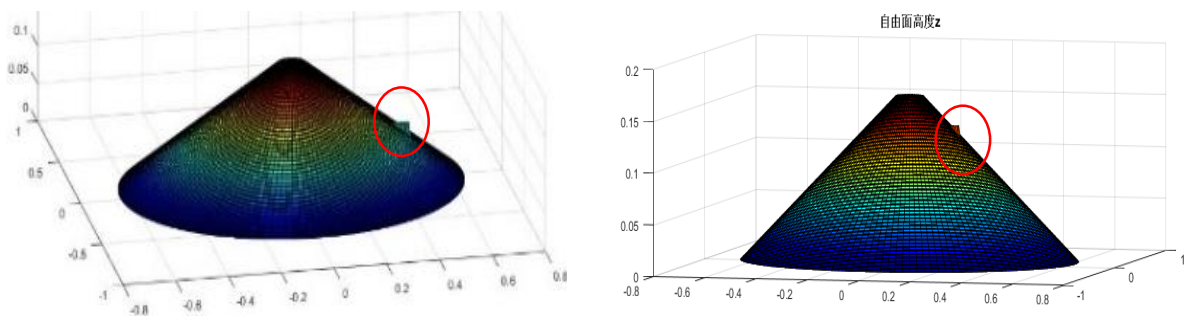
第一阶段进行了 9 组实验，分别为流体深度 0.3m 时：背景转速 0.6283rad/s,角速度差为 0.0063rad/s,扰动源(如图 7,横置的小型三棱柱状)距中心平均位置为 0.19m、0.31m、0.42m；背景转速 0.6283rad/s，角速度差 0.0161rad/s，扰动源居中心位置 0.42m；背景转速 0.6283rad/s，角速度差 0.0331rad/s，扰动源位置 0.42m；

流体深度 0.25m 时：背景转速 0.6283rad/s，角速度差为 0.0063rad/s，扰动源位置分别为 0.19m、0.31m、0.42m、0.55m。

我们在这里截取部分实验结果进行展示，为了方便起见采用径向速度  $u$  进行绘图，这一物理量比较能够清楚的反映波动特征。其方向的选择与模式相同径向向外为正，径向向内为负。

第一组水深 0.3m，背景转速 0.6283rad/s，角速度差为 0.0063rad/s 扰动源位置在半径距中心 0.42m 处如下图所示扰动地形用红圈标出。第二组数值实验改变了扰动源的位置移动至距中心 0.19m 处，水深具体实验参数为 0.3m 时背景转速 0.6283rad/s，角速度差为 0.0063rad/s 扰动源位置 0.19m。第三组实验为加快转速使角速度差变为 0.0331rad/s 是一、二两组实验的四倍。这三组实验采用的地形扰动在图 11 有展示。图 13、14、15 分别展示了这三组实验的结果。

图 11，左图为第一、三组实验的地形图距中心 0.42m，右图为第二组实验地形距



中心 0.19m，其形状为长 4cm 到 5cm，高 1cm 的三棱锥形凸起。

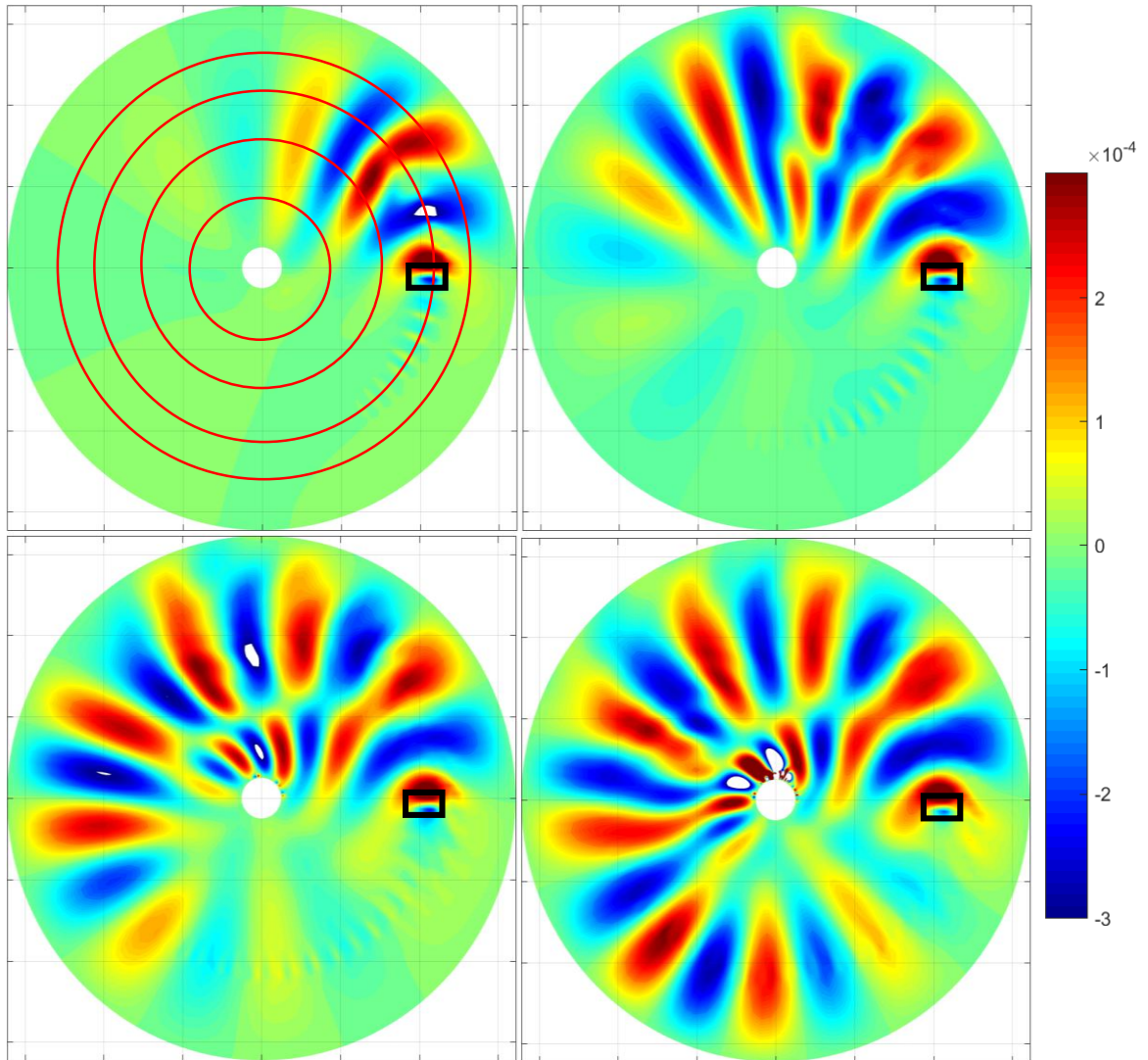


图 12, 左上、右上、左下、右下分别为第一组实验在 125s、250s、375s、500s 四个时刻径向速度分布示意图, 绘图的数值范围为  $\pm 3 \times 10^{-4}$  超出这个范围的视作省缺值, 在图中用白色空白表示或者用深红色填充。黑框表示扰动源的大小和位置。

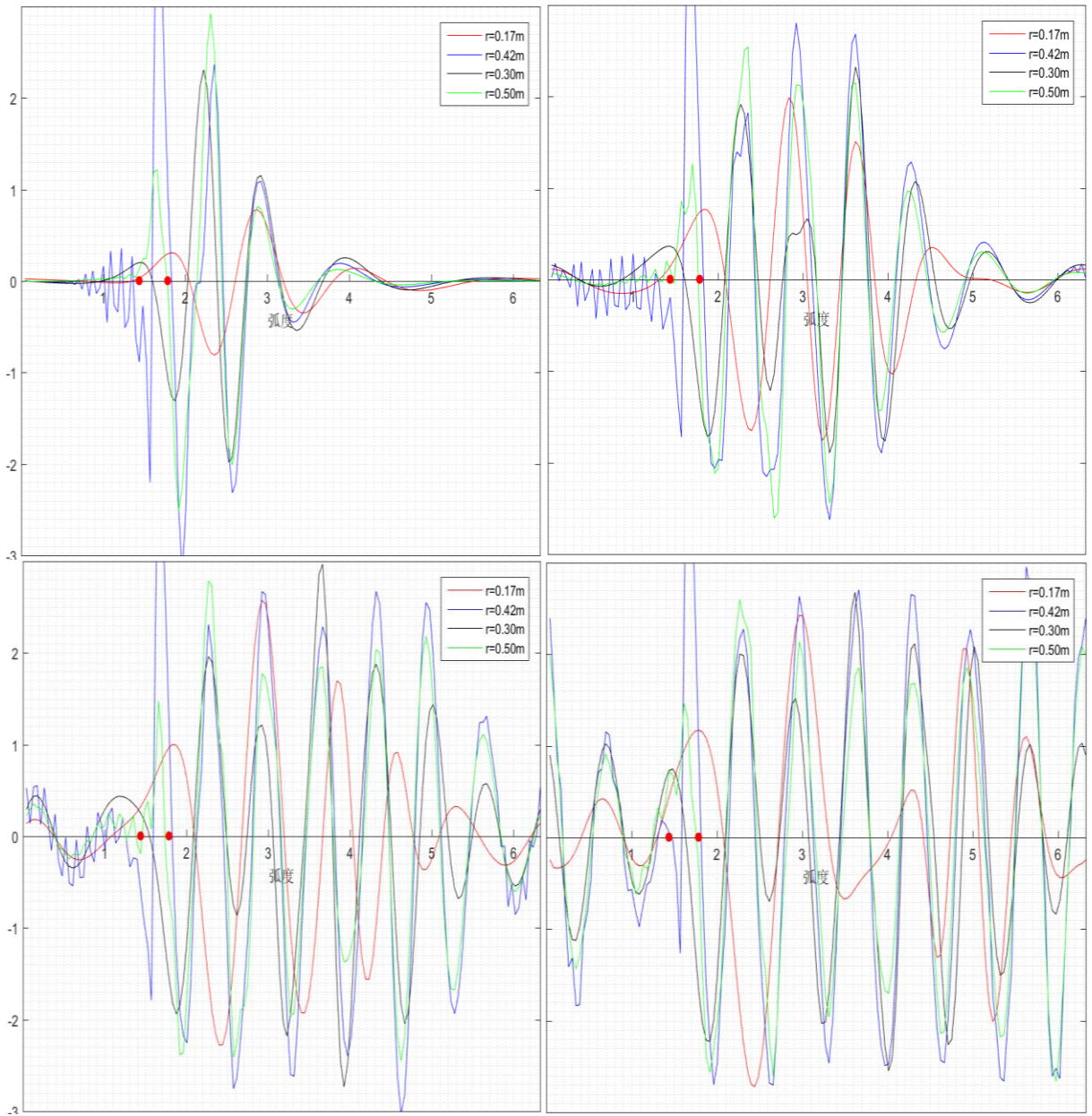


图 13, 按照图 12 左上图的红圈方式在半径 0.17m、0.30m、0.42m、0.50m 进行环形切片结果, 不同颜色代表不同位置的切环, 红色 0.17m、黑色 0.30m、蓝色 0.42m、绿色 0.50m, 这四张分别为 (按照图 12 顺序) 为 125s、250s、375s、500s 的模式模拟结果。其中红点为扰动源的位置, y 轴的取值范围为  $\pm 3 \times 10^{-4}$ , 可以看到波动的主要振幅是沿着群速方向向下游传播的。在图中显示是向右传播的波列。

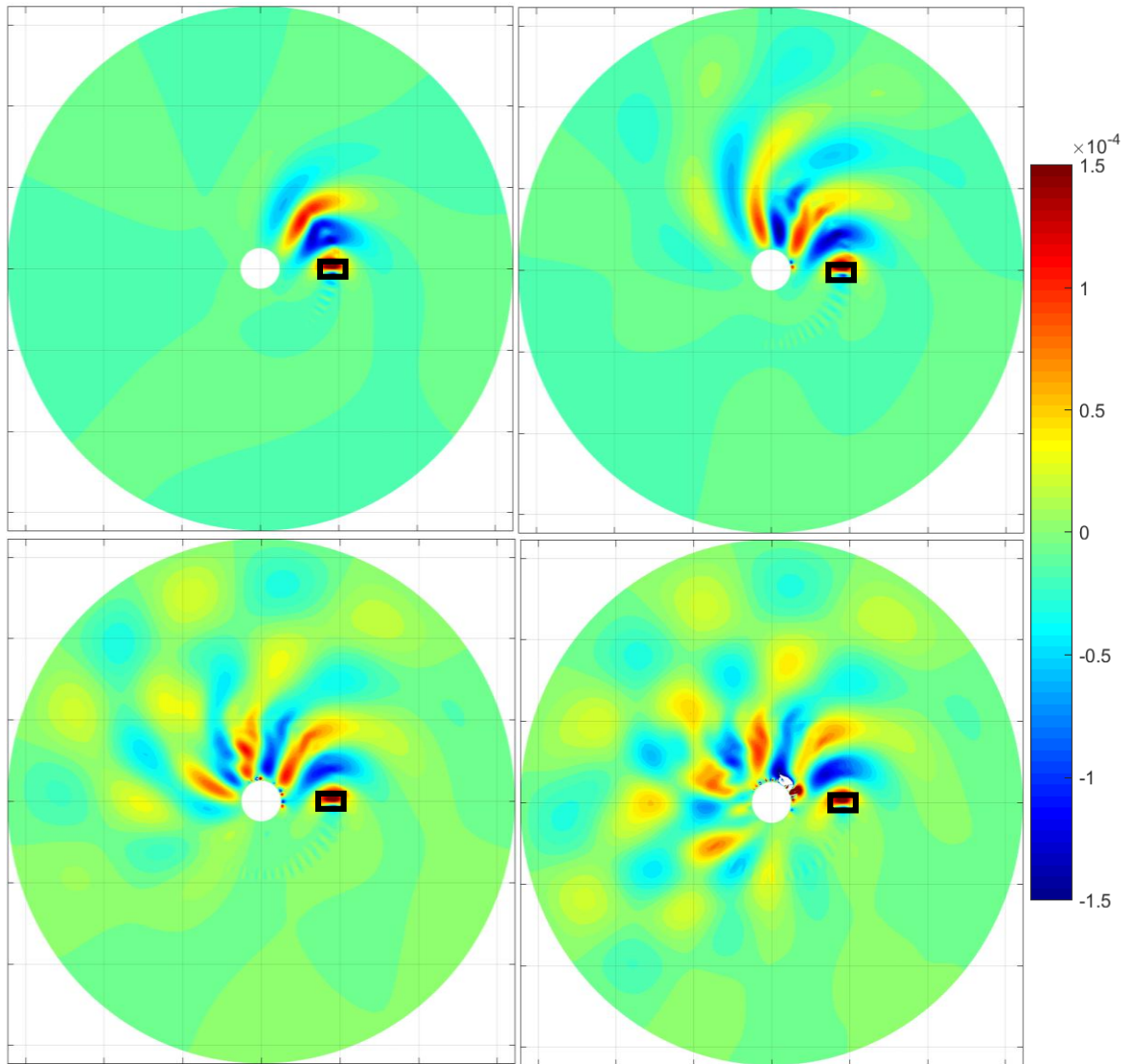


图 14，以上四幅图是第二组实验（ $H=0.3\text{m}$ ， $\Delta\omega=0.0063\text{rad/s}$ ， $\omega=0.6283\text{rad/s}$ ，扰动地形的平均位置  $0.19\text{m}$ ）在  $125\text{s}$ 、 $250\text{s}$ 、 $375\text{s}$ 、 $500\text{s}$  的模式模拟结果。黑色边框为地形扰动源的大小及位置示意图。

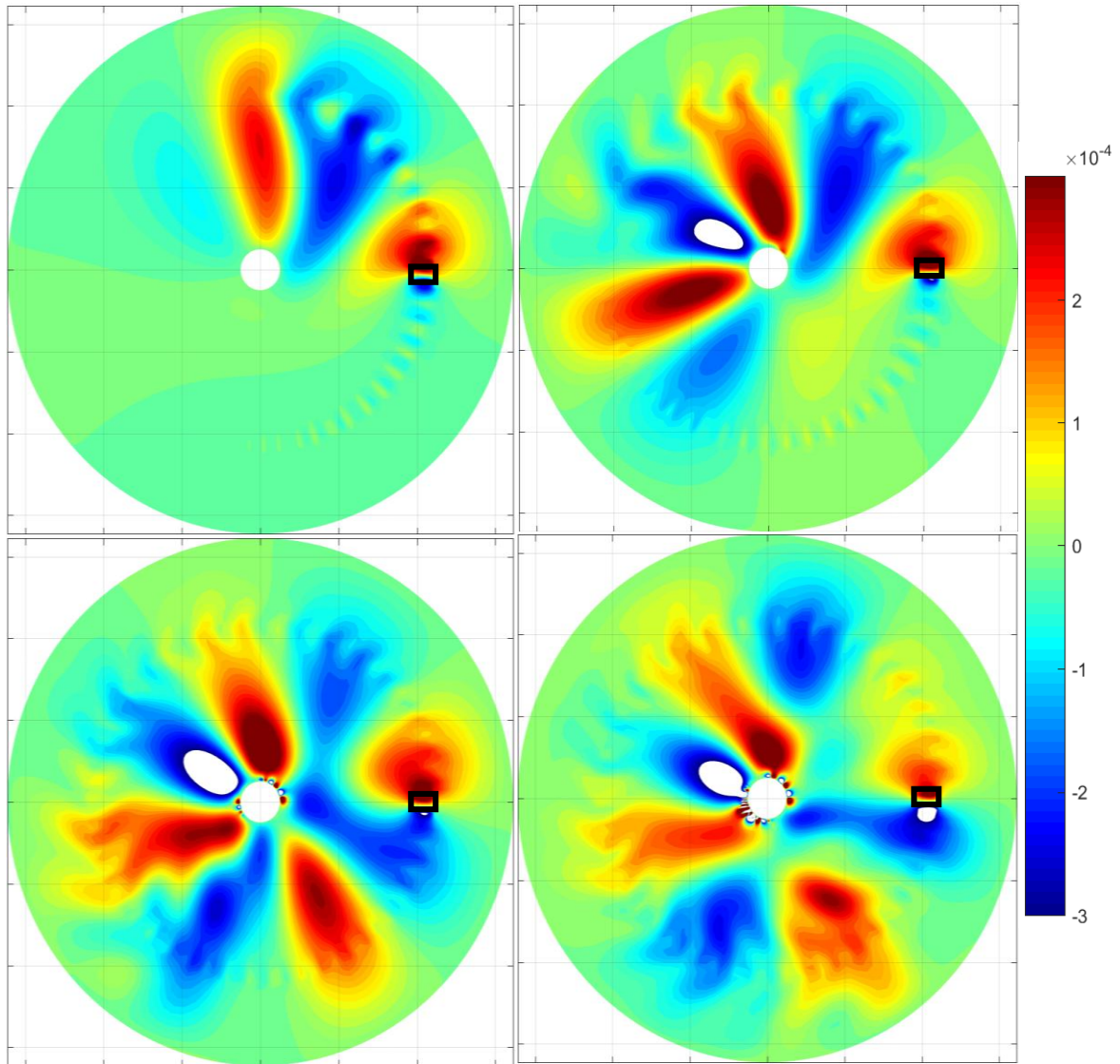


图 15, 第三组实验, 调整角速度差为  $0.0331\text{rad/s}$  (实验参数为  $H=0.3\text{m}$ ,  $\Delta\omega=0.0331\text{rad/s}$ ,  $\Omega=0.6283\text{rad/s}$ , 扰动地形  $0.42\text{m}$  具体情况如图 11 所示), 一次分别为  $45\text{s}$ 、 $90\text{s}$ 、 $135\text{s}$ 、 $180\text{s}$  的模式结果, 由于该组背景基流可以在  $189\text{s}$  逆时针方向绕转盘一周所以只用模拟  $180\text{s}$  的结果就能够满足要求。

我们可以看到以上三组实验明显的展现了模式模拟出的地形 Rossby 波动的结果, 但是存在一个最主要的问题就是地形的扰动源的宽度很窄, 只有两倍格距的宽度, 由此会激发出非真实的小波长波动, 对于大的 Rossby 波动造成一定程度上的干扰, 表现在图 12 的扰动源位置逆时针方向上, 另外也表现在图 13 红点左侧在  $r=0.42\text{m}$  的蓝色曲线上出现的波长在两倍格距的锯齿波动这些波动。我们对扰动地形改进改动主要是加大径向的宽度, 并且使其坡度变缓如下图所示。这样改进后的地形可以有效消除上面提到的虚假的非物理波动,

再次进多组实验分别为液面高度  $H=0.25$  时背景转速  $\omega=0.6283\text{rad/s}$  时，角速度差分别为  $\Delta\omega=0.0063\text{rad/s}$ ， $\Delta\omega=0.0126\text{rad/s}$ ， $\Delta\omega=0.0189\text{rad/s}$ ， $\Delta\omega=0.0252\text{rad/s}$  四组实验，在  $H=0.20\text{m}$ ， $\omega=0.6283\text{rad/s}$  又进行了相同角速度差的另外四组实验。

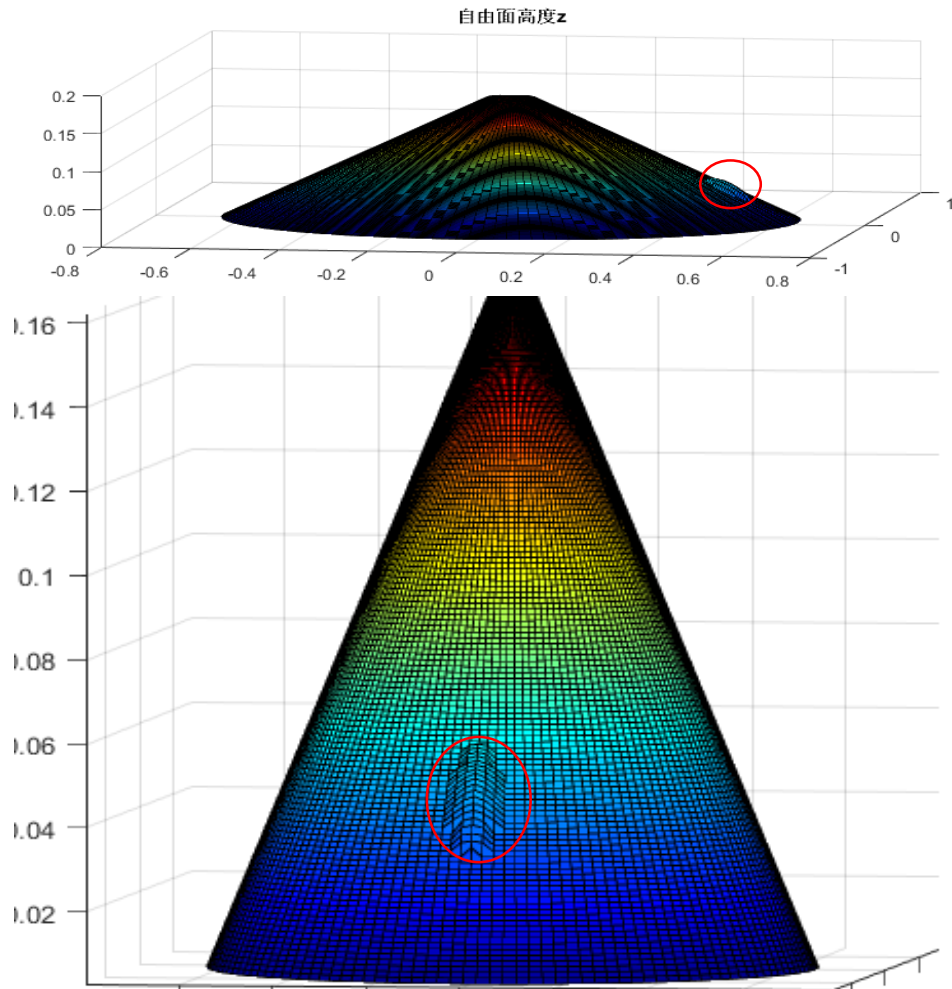


图 16，连个不同角度表现的，改进后的指数形式的山地扰动地形，在上下两幅图分别用不同角度展示（在红圈标记位置）具体公式可以表示为

$$zs = R \tan(15) + h_m \exp\left(-\left(\frac{r}{r_m}\right)^2\right), \text{ 其中 } h_m=1\text{cm}, r_m=5\text{cm}, \text{ 切向方向最大处横跨 } 5$$

个格距，径向最大处有 10 个格距。（L.zavala Sanson, 2012）

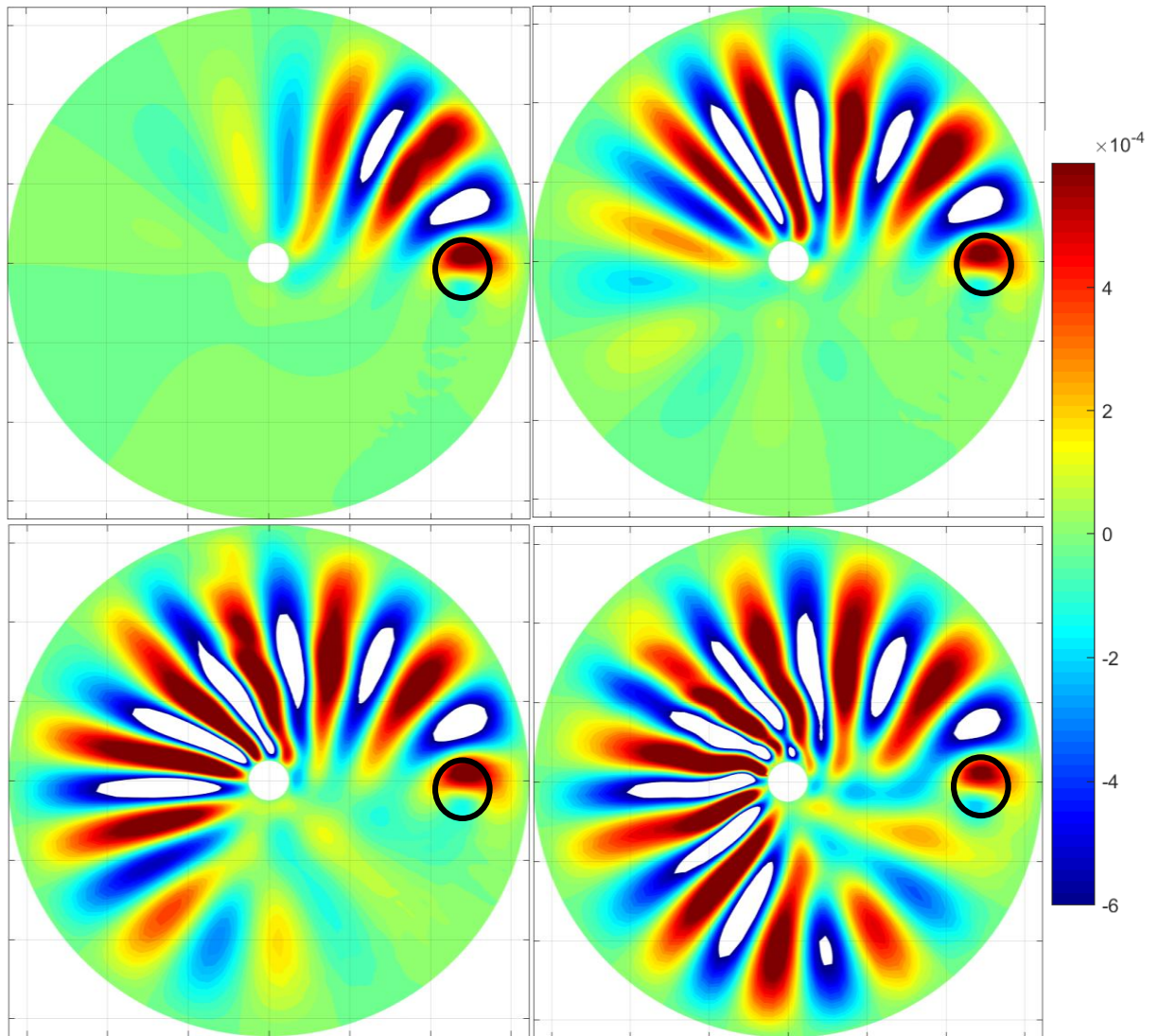


图 17，以上四张图分别为水面高度  $H=0.25$  时背景转速  $\omega = 0.6283\text{rad/s}$  时，角速度差为  $\Delta\omega = 0.0063\text{rad/s}$ ，在 160s、320s、480s、640s 的模式模拟结果，明显的看出在圆形扰动地形如图中黑圈所示，其顺时针上游地区并没有出现与前三组实验结果类似的波长在两倍格距左右的非真实波动。

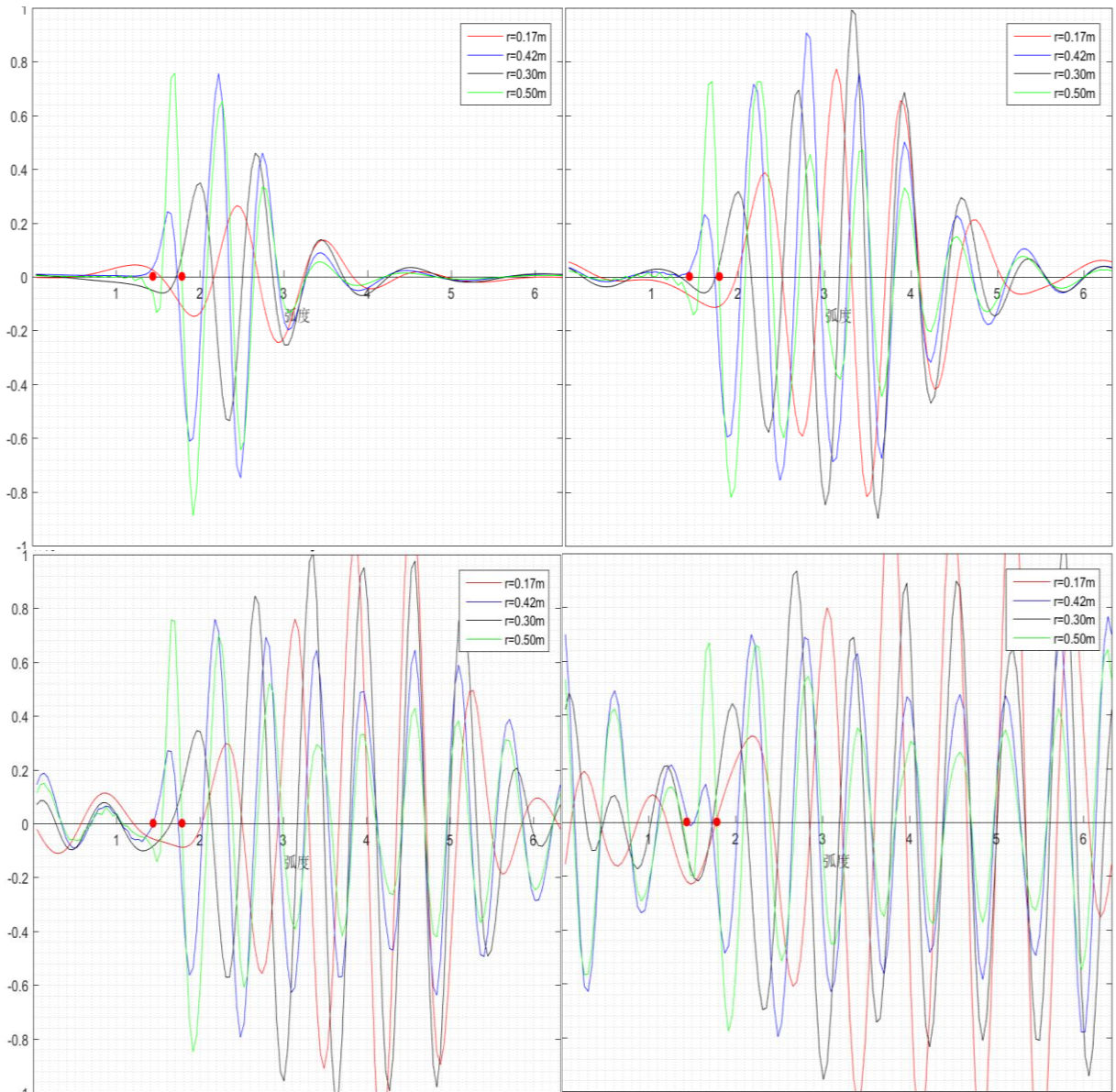


图 18, 对于图 17 在半径  $r=0.17\text{m}$ 、 $0.30\text{m}$ 、 $0.42\text{m}$ 、 $0.50\text{m}$  处的环形切片结果 (与之前图 13 的方法相同), 时间分别对应的是  $160\text{s}$ 、 $320\text{s}$ 、 $480\text{s}$ 、 $640\text{s}$  (四个时刻对应的是图 17)。Y 轴为径向速度大小, 范围  $\pm 1 \times 10^{-3}$ , x 范围  $0 \sim 2\pi$ , 逆时针为正向, 两个红点代表扰动地形所处的位置。其中我们可以看到扰动地形所在的  $r=50\text{m}$  处的 (绿线), 扰动源的左侧并没有出现波长为两倍格距的虚假波动。前三组实验得到的问题得到了很好的解决。

(二) 与行星 Rossby 波对比

以上四组实验可以较好地表示出地形强迫可以激发出地形 Rossby 波动，而且根据公式位涡  $q = \frac{f + \zeta}{h}$  在均值正压条件下的守恒原理推出的等效

地形  $\beta$  效应的公式 
$$\beta = \frac{f}{H} \left( \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial z_s}{\partial r} \right) = \frac{f}{H} \left( \frac{\Omega_1^2 r}{g} + \tan 15 \right)$$
 验证了数值模式中加

入的底角为 15 度的锥面地形确实可以产生预想的地形  $\beta$  效应，下面的两组实验将地形  $\beta$  效应所产生的地形 Rossby 波，与改变科氏力参数随半径分布的真正的  $\beta$  效应产生的行星 Rossby 波动进行比较。这两组采用的参数为：第五组不改变科氏力参数随半径的分布，第六组使得  $f$  以

$$\frac{df}{dr} = \beta = -\frac{f}{H} \tan(15)$$
 随半径线性减小，两组实验采用了相同的背景转速  $\omega = 0.6283 \text{ rad/s}$  时，角速度差为  $\Delta\omega = 0.0126 \text{ rad/s}$ ，液面高度  $H = 0.2 \text{ m}$ 。

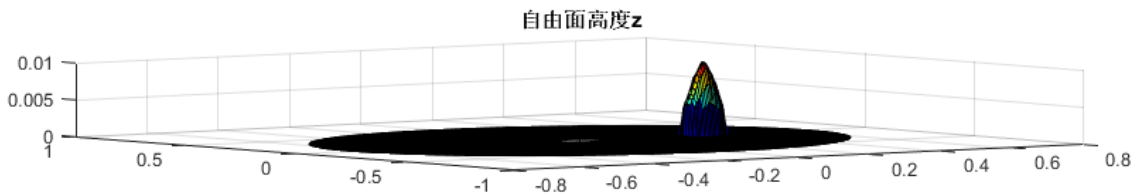


图 19，行星 Rossby 波动实验所使用的地形，其中心径向上距圆心  $r = 0.35 \text{ m}$  的位置，采用的形状为  $z_s = h_m \exp\left(-\left(\frac{r}{r_m}\right)^2\right)$  其中  $h_m = 0.01 \text{ m}$ ， $r_m = 0.05 \text{ m}$

在图 20 中可以看到，既没有加入能够产生地形  $\beta$  效应的锥面地形，也没有加入行星  $\beta$  效应的第五组实验中，结果为脱离扰动地形所产生的过山的涡列，并不能产生波动，这就验证了  $\beta$  效应是产生 Rossby 波动的必要条件。在第六组实验中，由于添加了行星  $\beta$  效应，基本气流经过扰动山地，下游产生了 Rossby 波动，其产生、传播以及维持的机理与以上地形 Rossby 波动相同，这就是为什么第六组实验的下游 Rossby 波动的径向速度结果与之前的四组地形 Rossby 波动的实验类似。

另一方面根据上文提到的公式  $\frac{d\zeta}{dt} = -(Be)v - (Hi)\vec{V} \cdot \nabla_{zs}$ ,

$$Be = \frac{\beta L^2}{U}, \quad Hi = \frac{fLh_m}{UD}$$

所添加的地形，第五、六组实验的 Hi 都为 0.71 远小于阻止涡旋从山地脱落的临界值 6.0，所以在图 20 中我们可以看到涡旋从扰动地形脱落后向下游传播。

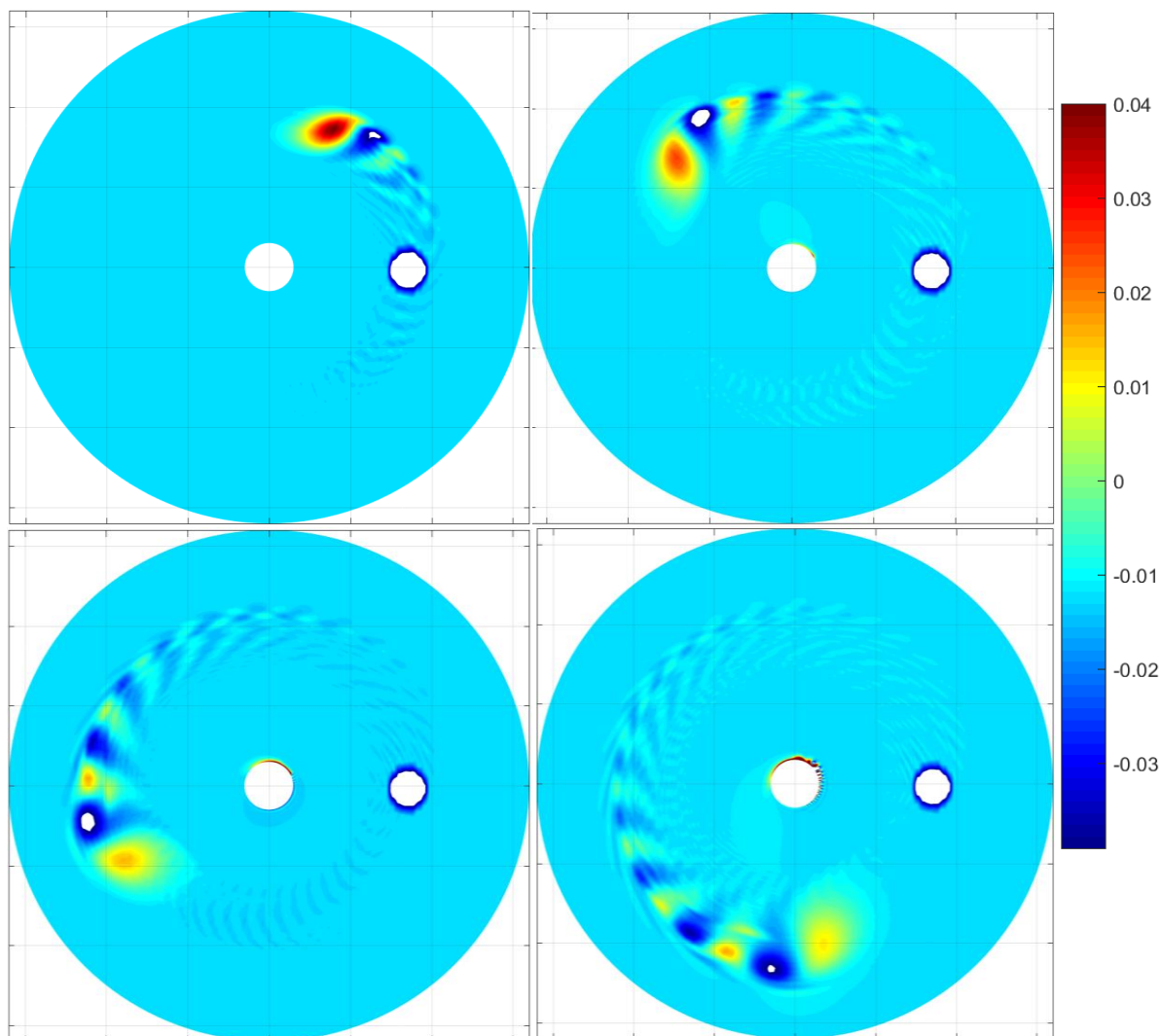


图 20，为第五组实验 100s、200s、300s、400s 的模式模拟结果其等值线绘图的物理量为相对涡度，取值范围为  $\pm 0.03 \text{ 1/s}$ ，分辨率为  $0.003 \text{ 1/s}$ ，红色为正相对涡度，蓝色为负相对涡度，超过取值范围的按照缺省值处理。

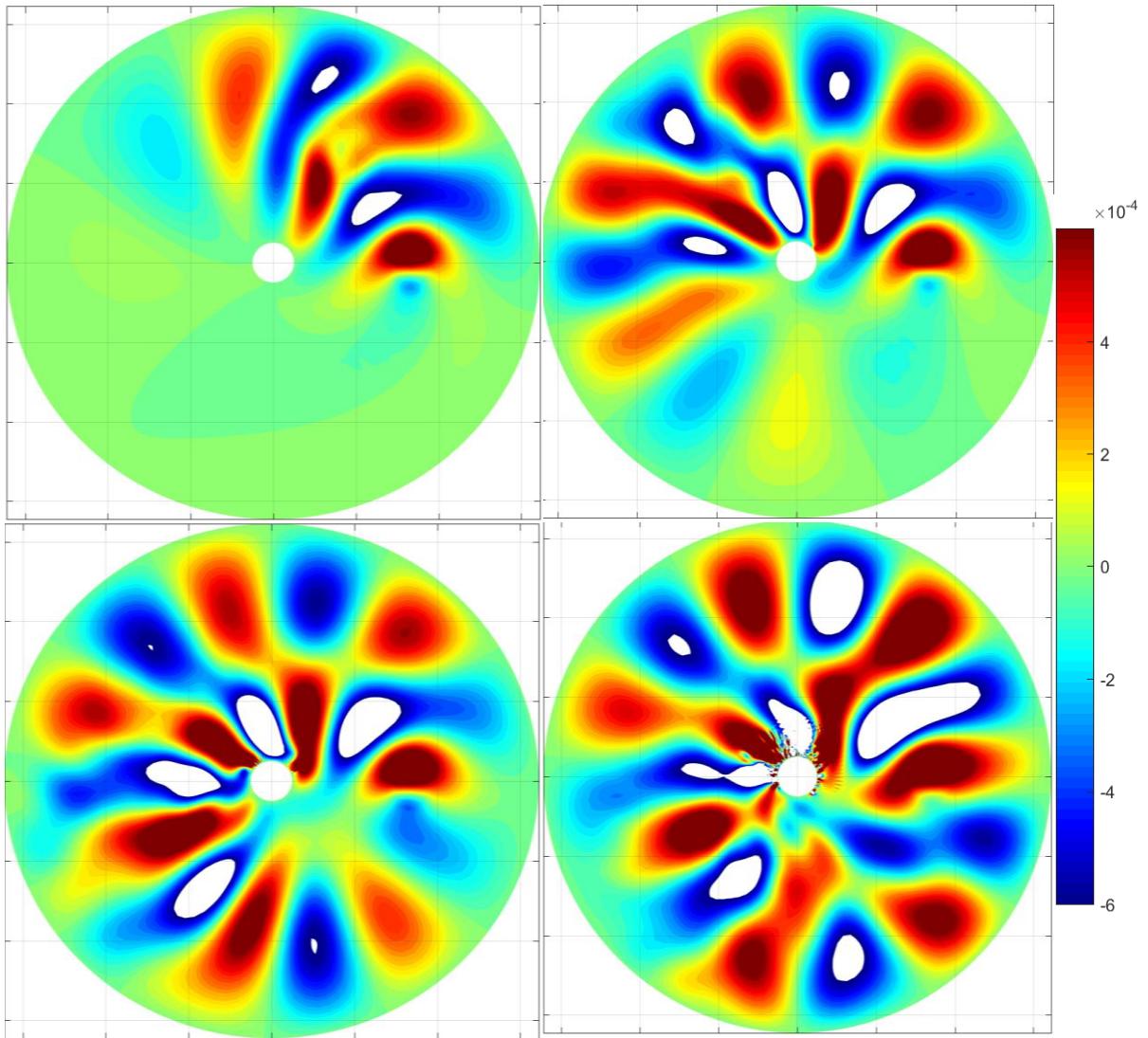


图 21，以上四幅图分别为第六组实验在 100s、200s、300s、400s 的模式模拟结果。填图要素为径向速度  $u$ ，范围  $\pm 6 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ ，分辨率为  $3 \times 10^{-5}$ ，圆盘半径 1.3m。白色和深红色区域分别为小于或大于范围做的省缺处理。

的六组实验与第五组实验有着相同的液面高度、背景转速和角速度差，不同的是添加了随半径增大而减小的科氏力参数  $f$ 。如图 21 所示产生了与第五组实验完全不同的结果，其地形下游产生了 Rossby 波动，为了进一步进行验证我们将我们的结果与文献中的进行比对。

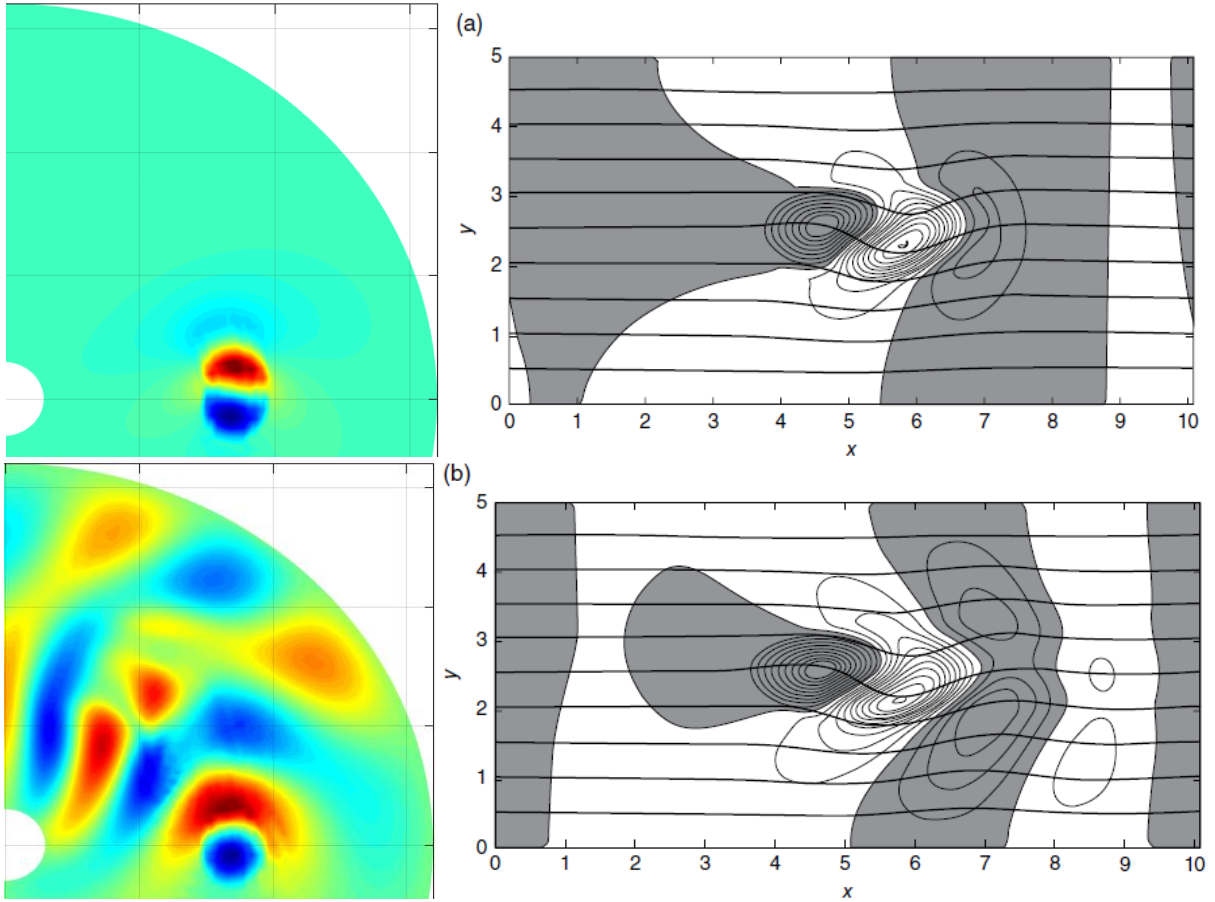


图 22，左侧两张图为第六组实验 ( $\tau_E=32.8s$ ,  $Be=3.8$ ,  $Hi=0.71$ ) 的涡度等值线图，左上  $t=0.915\tau_E$ ，左下  $t=5.95\tau_E$ ，右侧两张图为正压涡度方程数值积分的结果

( $\tau_E=3.0s$ ,  $Be=3.0$ ,  $Hi=4.0$ ) 细的等值线为涡度，粗实线为流线，右上时刻为  $t=1.0$

$\tau_E$ ，右下  $t=6.0\tau_E$ 。(Hoskins et al., 2014)

在文献中，引入旋转减弱周期  $\tau_E = \frac{D}{(2f\nu)^{1/2}}$  (这里取空气的运动粘性

系数  $\nu = 14.8 \times 10^{-6} m^2/s$ )。其结果以旋转减弱周期的倍数表示。旋转减弱

周期是根据公式  $\frac{d\zeta}{dt} = -(Be)\nu - (Hi)\vec{V} \cdot \nabla_{zS} - \frac{\tau}{\tau_E} \zeta$  ( $\tau = \frac{L}{U}$  为平流时间尺

度) 推导出的，其主要表示正、负涡度在向下游传播时在经过  $\tau_E$  时间绝对

值后减弱为原先的  $1/e$ ，图 22 的结果实际上是过山产生的涡旋与下游激发

出的 Rossby 波动的涡度场的叠加，第六组实验  $Be$  与资料中类似，但是  $Hi$

相差很多（第六组实验  $Hi=0.71$ ，而 Hoskins 书中的例子给出的  $Hi=4.0$ ）， $Hi$  数较小虽然可以有效向下游传递扰动涡度但在一定程度上会对下游波动的涡度场进行干扰。而 Hoskins 书中的结果由于  $Hi$  数较大所以对下游涡度常干扰较小。另外由于浅水波动方程并不能体现出 Ekman 边界层中的旋转减弱效应，所以过山涡旋向下游传播的过程中强度不变而，如果对存在旋转减弱效应的正压涡度方程进行数值积分，过山涡旋向下游传播的过程中会随时间快速减弱消失。

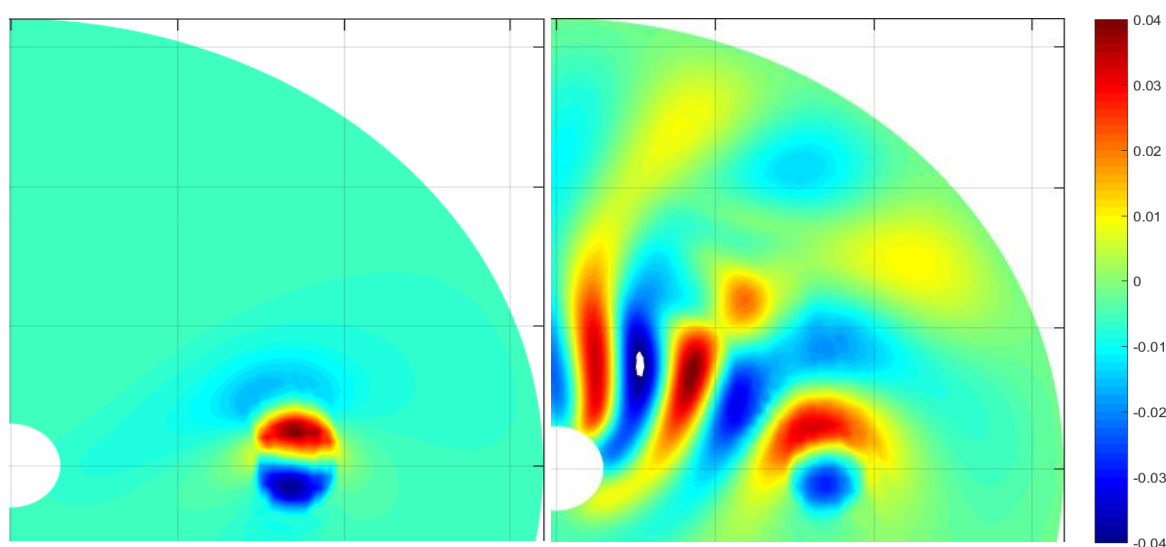


图 23，等效  $\beta$  效应下的第七组实验地形 Rossby 波动的涡度结果（ $H=0.25m$ ，背景转速  $\omega = 0.6238rad/s$ ，转速差  $\Delta\omega = 0.0063rad/s$ ， $\tau_E = 27.8s$ ， $Be = 3.8$ ， $Hi = 0.84$ ）左图时间为  $t = 1.07\tau_E$ ，右图时间为  $t = 5.94\tau_E$

我们再来看看地形 Rossby 波的涡度情况，第七组实验选择与第五、六组实验相同的背景转速与转速差（意味着其背景初始基流以及科氏力参数是相同的）。选择相近的无量纲时间，可以看到其涡度场与第六组实验和参考资料的正压涡度方程的结果十分的相似，波动形式基本相同。细节的差异这里就不进行讨论。总的来说地形 Rossby 波和行星 Rossby 波动基本形式是相同的，机理也相似。

### (三) 与流体力学实验进行比对

在南京大学大气科学学院本科创新实验室周昂等，对于地形 Rossby 波动进行了系统的实验研究。其研究方法在上文已经叙述过了。流体力学实验分为两大组，其一为改变背景转速观察激发出的 Rossby 波的静止波长的变化，其二为转速差和背景转速不变改变液面深度观察静止波波长  $L_s$  的变化。

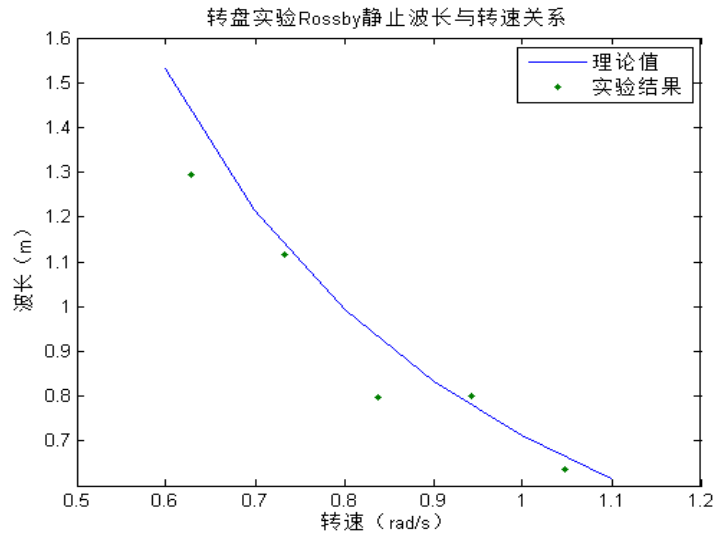


图 24 静止 Rossby 波长随转速变化的理论和实验结果对照（其中实线为理论

值，符合  $L_s = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta\Omega r}{\beta}} = 2\pi \sqrt{\frac{k\Delta\Omega r D}{2\Omega \tan(15)}}$ ）， $\Delta\omega$  取 0.105， $D$  取 0.1；实点为实验

值，依次为(0.6283,1.295), (0.7330,1.117), (0.8378,0.796), (0.9425,0.800), (1.0472,0.636)

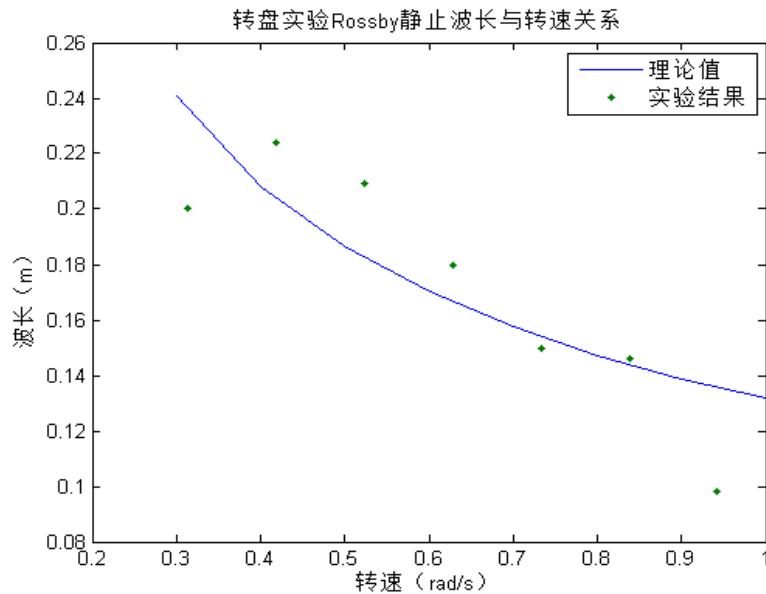


图 25 静止 Rossby 波长随水深变化的理论和实验结果对照

(其中实线为理论值, 符合  $L_s = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta\Omega r}{\beta}} = 2\pi\sqrt{\frac{k\Delta\Omega r D}{2\Omega \tan(15^\circ)}}$ ),  $\Delta\omega$  取

0.209, R 取 0.15,  $\omega$  取 0.733; 实点为实验值, 依次为(4.0,0.192), (4.5,0.209), (5.0,0.210), (5.5,0.226), (6.0,0.217), (6.5,0.233), (7.0,0.232), (7.5,0.258), (8.0,0.259), (8.5,0.261), (9.0,0.260), (9.5,0.246), (10.0,0.275), (10.5,0.253))

在上文的实验方法中就提到过, 由于现实实验中水有很大粘性而且在水槽的底面和侧面边界都存在很大的摩擦, 背景基流就会比设计值  $\bar{u} = \Delta\omega r$  小。经过多次试验得到了经验公式  $\bar{u} = k\Delta\omega r$ ,  $k=0.28$ 。对于这个参数的严谨性本文作者在此持保留意见, 但是至少可以帮助解释上面两组实验的结果。在数值模式中并没有采用以上两种数据的上展示方式, 主要是因为即使在有着相同的液面高度、背景转速  $\omega$  和  $\Delta\omega$  时, 扰动源的位置也会影响激发 Rossby 驻波波长的长短, 甚至在完全同一组实验里 Rossby 驻波波长也会随着半径变化而变化。所以在数值模式的实验中很难找出一个代表性的波长来代表整个场的驻波波动。流体力学实验由于空间分辨率低, 一般选用扰动源半径左右产生的波动进行测量。

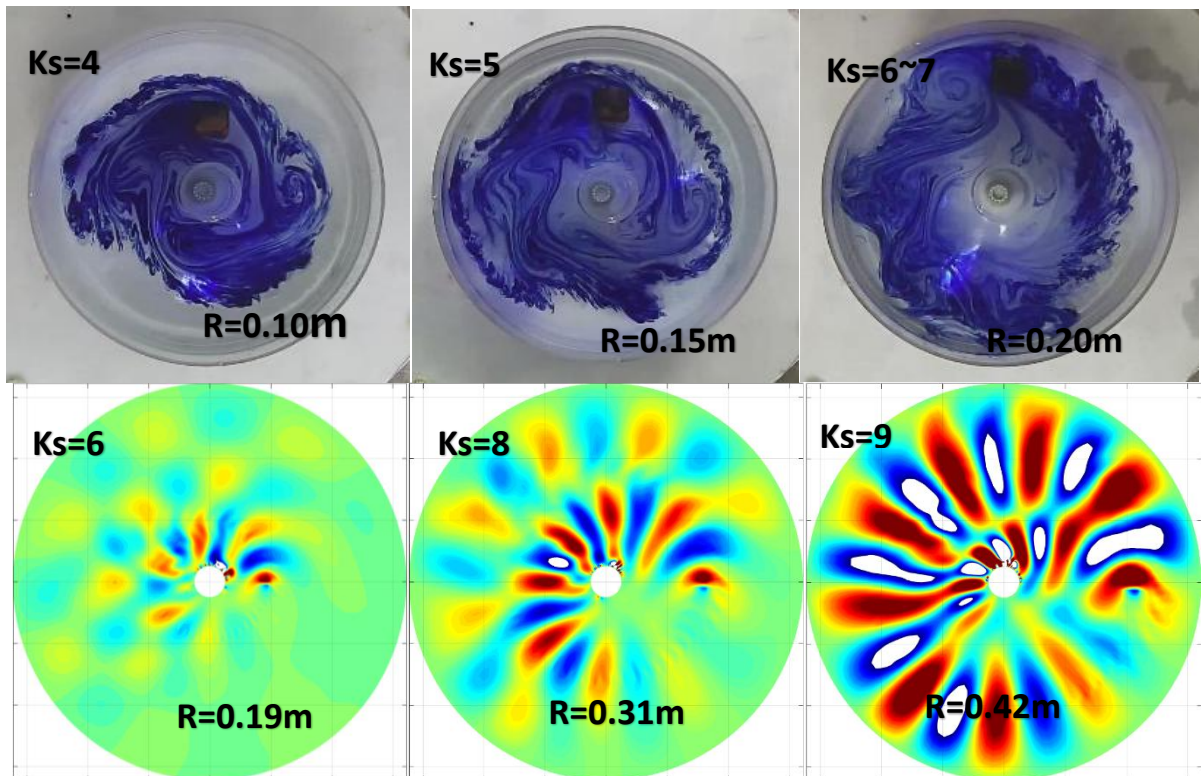


图 26 上排为不同地形 Rossby 波波长对比实验

(从左到右地形依次放置在距离水槽中心 10cm、15m、20cm 处；统一截取改变转速后 60s 的图像)。下排图为模式模拟的 500s 的结果，填图要素为径向速度向外为红色（扰动源放置位置为 0.19m、0.31m、0.42m）。

另外一种研究的思路是在不同的半径位置（如图 26）放置扰动源。在现实的流体力学实验中可以看到，背景基流、转速、流体高度相同的条件下，不同位置的扰动源激发的 Rossby 静止波（驻波）波长不同，在数值模拟的实验截图中我们同样接也可以看到如上现象，接下来我们会在数值模式数据基础上详细讨论这一问题。

#### (四) 小结

综合以上数值模拟的结果，对比行星 Rossby 波和文献的结果，我们可以认为实验和模式的最初设计是成功的。地形  $\beta$  效应确实能够模拟行星  $\beta$  效应产生 Rossby 波动，产生的 Rossby 波动以驻波为主。

无论何种地形，在什么位置都能够产生驻波，较快的基流会将 Rossby 驻波波长拉长，使波数减少（图 12 和图 15 对比）。产生的驻波波数与扰动源位置有关，在扰动源半径范围内驻波波数分布满足  $ks = \sqrt{\frac{\beta}{u}}$ ，与局地水深、科氏力大小、斜面坡度、半径都有关。具体关系之后会做讨论。

如果就探究 Rossby 波动形成机制来讲，数值模拟比试验有很多的优势。数值模式中参数可靠性高，没有流体实验中水受到的内部粘性，内外壁和底面边界的摩擦影响，能量几乎没有损失可以提供更理想的实验条件，排除不必要的干扰。另外，数值模式比流体实验有着更高的空间分辨率，结果定量分析更为精细准确，方便总结分析得出结论。

## 六、 实验现象的理论分析与展望

(一) Rossby 波动的激发与维持机制

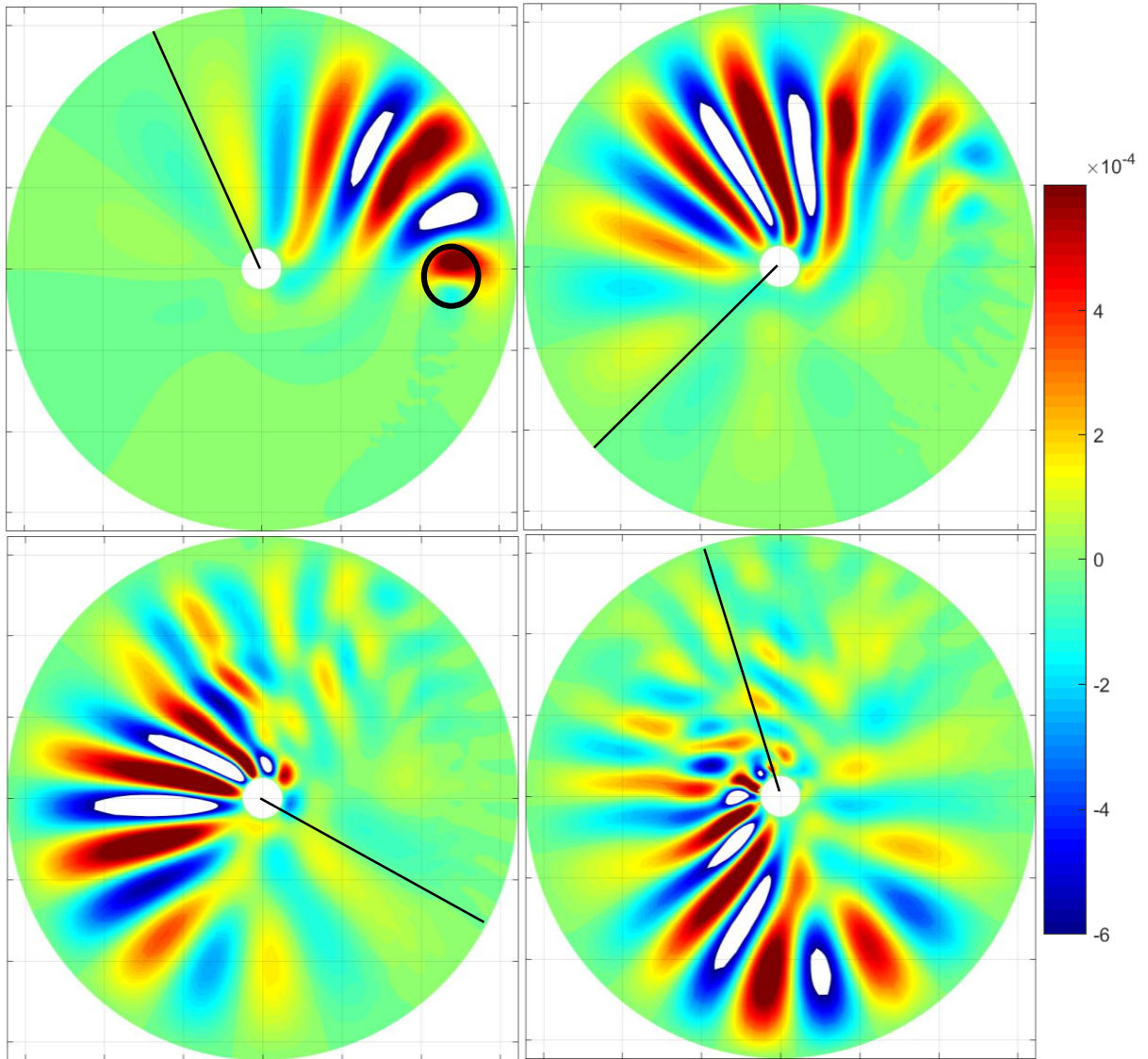


图 27, 地形 Rossby 波动实验中 ( $H=0.25\text{m}$ ,  $\omega=0.6238\text{rad/s}$ ,  $\Delta\omega=0.0063\text{rad/s}$ ) 左上图为加入扰动源 160s 的结果。之后撤去扰动源, 后三张图分别是 320s、480s、640s 的结果。黑圈为扰动源的位置及大小, 黑实线为群速所到达的位置, 四幅图分别为 116 度、231 度、346 度、462 度。

通过图 27, 我们可以看到扰动地形的存在是维持 Rossby 驻波的必要条件, 在撤去扰动地形之后, 失去外强迫的波动场, 整体开始发生频散。可以看到在驻波群速之前有长波的群速传播, 驻波群速之后短波的群速慢落在后面。另外, 主要波动能量集中在驻波波长左右的波动上, 随着时间的进行, 模式自身对于波动的频散也表现出来了。如果我们观察图 28 的下图

以及图 29 到 32 可以看到:

1, 在半径大于扰动源的位置上波数普遍低于驻波的理论值, 也就是波长长于静止波, 导致反向传播相速度大于零, 出现顺时针方向上的长波传导。

2, 从四幅图的变化来看: 虽然本论文采用的是总动能、总涡度拟能守恒的形式, 能够有效抑制波动能量向短波的串级, 扰动地形虽然经过改进, 但是其 6 到 7 个格距的径向宽度, 还是会激发相应的非真实的短波波动, 如果扰动源自始至终都存在, 整个转盘的 Rossby 波动可以看成是扰动地形对于背景基流造成的受迫振动, 主要的波长就会由基流流速与背景  $\beta$  效应所决定, 模式自身波动能量的串级和地形尺度造成的非真实解就不容易显现出来 (如图 28 左下图), 当扰动源消失之后其自身的能量的串级以及频散就很明显了 (图 28 上图在  $r=0.50m$ 、 $r=0.42m$  的位置上出现非真实的短波)。

所以说, 背景基流、扰动源 (地形、热源等), 以及背景  $\beta$  效应 (行星  $\beta$  效应、地形  $\beta$  效应) 是稳定的 Rossby 驻波波动的产生的必要条件, 缺一不可。

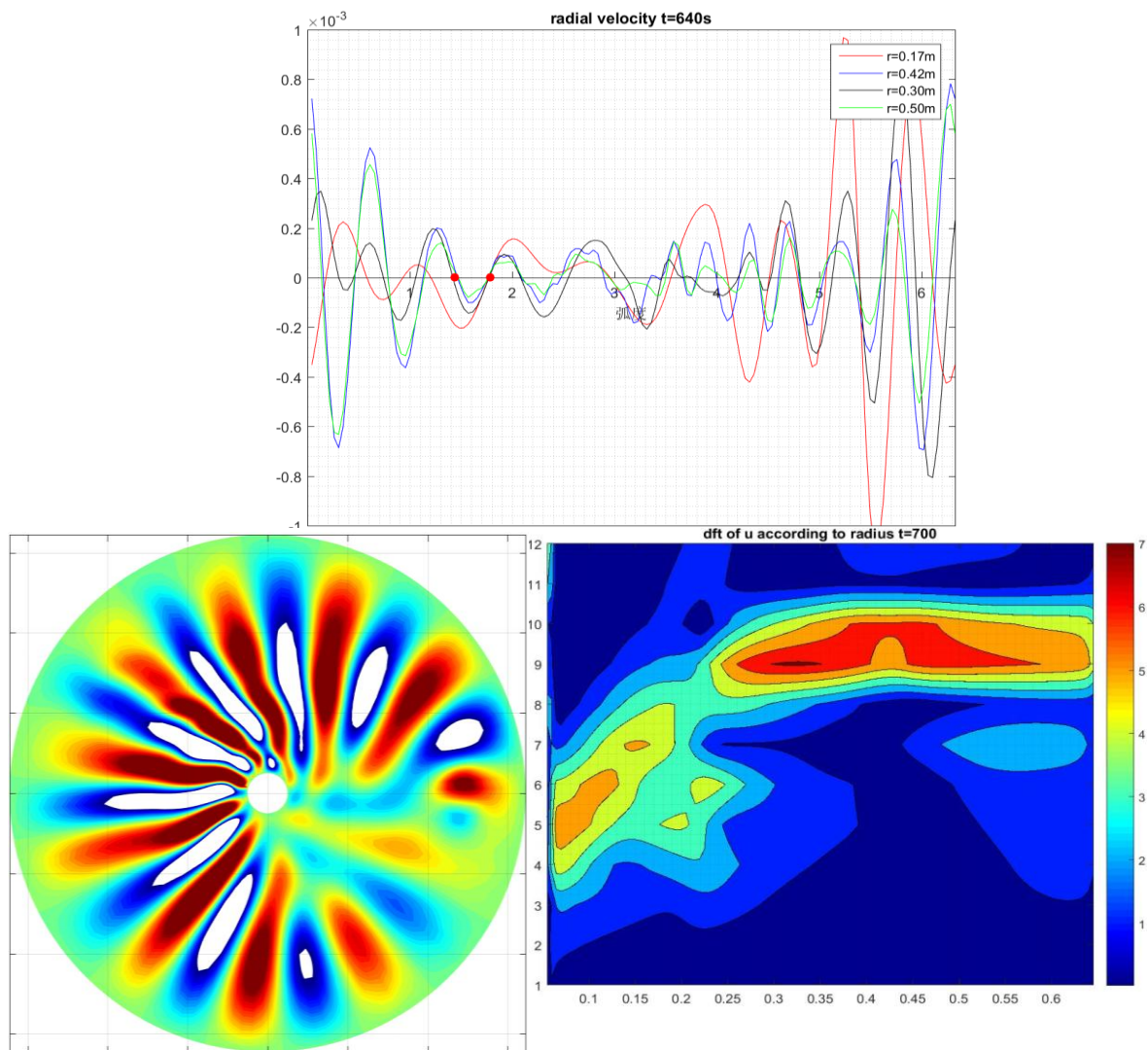


图 28，上图为图 27 右下图的环形截面图。左下图为与图 27 实验参数相同一直保留扰动地形 640s 的结果，右下图为 ( $H=0.25m$ ,  $\omega=0.6238rad/s$ ,  $\Delta\omega=0.0063rad/s$ ) 离散傅里叶变换之后每个半径圆周的功率谱。(横轴为半径，纵轴为波数，填图要素为功率)

## (二) Rossby 波动的切向传播

无论是数值模式，还是流体力学实验的结果，Rossby 波的切向传播主要是以群速传播为主，其能量主要集中在 Rossby 驻波波长附近的波动上，由之前的图 12、14、15、17、21 中无论是地形 Rossby 波动还是行星 Rossby 波动，其波动振幅的主要传播方式是沿着群速方向向波动的下游传播（在图中为逆时针方向），而在顺时针相速度的传播方向上相速度传播的波动振幅较小而且波长明显长于驻波。在图 13、18 的环形截面图中可以更明显的观察到，波动在沿 x 坐标轴的正方向（对应的就是逆时针）传播，

而向  $x$  轴负方向（相速度方向）传播的能量较少。根据公式其相速度为

$$C_{p\omega} = \Delta\omega - \frac{\beta}{k^2 r}, \text{ 群速为 } C_{g\omega} = \Delta\omega + \frac{\beta}{k^2 r}。 \text{ 对于驻波 } ks = \sqrt{\frac{\beta}{\Delta\omega r}}, \text{ 其群速度}$$

$$\text{为 } C_{g\omega} = \Delta\omega + \frac{\beta}{ks^2 r} = 2\Delta\omega \text{ 可以看到群速的角速度形式与半径的大小无关,}$$

所以说在不同半径位置都以等角速度形式向下游传播，且为实验采用的减速角速度差的两倍。仔细观察图 18，我们看到在 160s、320s、480s、640s 驻波群速分别前进的弧度为 2.016rad、4.032rad、6.048rad、8.064rad，对比位置可以总结出：主要的能量以驻波群速大小传递，当扰动源最开始激发波动驻波的群速抵达之后振幅显著增长。但是并不是驻波群速抵达的同时振幅增长至最大，而是出现在一个波长之后。据此作者认为驻波的形成是个波动累加的结果。总之，扰动地形可以同时激发不同波长的波动，但主要能量集中在驻波上，当波长较长（长于驻波）时，其相速及群速都比驻波快，先行传播，但是当驻波的群速到达之后，其波动稳定下来形成驻波。

### (三) Rossby 驻波径向分布与传播

我们对每一圈的径向速度（参见图 12 的红圈截取方式）进行离散傅里叶变换（DFT）公式如下。

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n u_t \cos\left(\frac{2\pi k}{n}(t-1)\right)$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n u_t \sin\left(\frac{2\pi k}{n}(t-1)\right)$$

其中  $k$  可以取 1,2,3...[n/2]，这样不同波数的功率谱如下计算

$$S_k = \sqrt{\frac{1}{2}(a_k^2 + b_k^2)}$$

为了与 DFT 波数进行对应，我们在这里对于 Rossby 驻波的研究时采用驻波波数  $ks$  这一个单位，与通常的定义的波数  $ks' = \frac{2\pi}{L_s}$  不同，这里定义圆

周一圈的波长数目为波数  $ks = \frac{2\pi r}{L_s} = ks' r$ ，又根据 Rossby 驻波波长公

$$L_s = 2\pi \sqrt{\frac{u}{\beta}},$$

又因为  $\beta = \frac{f}{H} \left( \frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\partial z_s}{\partial r} \right) = \frac{f}{H} \left( \frac{\Omega_1^2 r}{g} + \tan 15 \right)$ 。将  $L_s$  和  $\beta$  的表达式带入

到  $k_s$  中可以得到如下表达式：

$$k_s = r \sqrt{\frac{\beta}{u}} = r \sqrt{\left( \frac{\frac{f}{H} \left( \frac{\Omega_1^2 r}{g} + \tan 15 \right)}{\Delta \Omega r} \right)} = r \sqrt{\left( \frac{\frac{2\Omega}{H} \left( \frac{(\Omega + \Delta \Omega)^2 r}{g} + \tan 15 \right)}{\Delta \Omega r} \right)}$$

进过计算上式中由离心力造成的抛物液面第一项为地形的第二项的百分之一至十分之一所以第一项可忽略。

$$k_s \text{ 便可以写为 } k_s = \sqrt{\frac{\frac{2\Omega}{H_{top} - \tan 15 R / 2} \tan 15}{\Delta \Omega}} r。 \text{ 下面至关重要的就是对}$$

于标准高度  $H$  的赋值，一般来讲都是平均水深（张晓爽 吕红民，2010）

定义为  $\bar{H} = H_{top} - \tan 15 R / 2$ （其中  $R$  定义为环形水槽的总半径长度）。然而

这一定义是存在问题的，前人没有发现的原因是因为实际流体实验的分辨率低，并且一般在扰动源所在圆周测量波长、波数等参数。正确的结果应当

取理论值  $h = H - \tan 15 * r$ （ $r$  代表半径长度是个变量）可得  $k_s$  为：

$$k_s = \sqrt{\frac{\frac{2\Omega}{H_{top} - \tan 15 R / 2 - \tan 15 (r - R / 2)} \tan 15}{\Delta \Omega}} r = \sqrt{\frac{2\Omega}{\Delta \Omega H} \left( \frac{1}{1 - (r - R / 2) \tan 15 / \bar{H}} \right) \tan 15 r}$$

为了使地形高度  $r \tan 15$  与  $H$  相比有可比性我们将液面改为 0.25m，这样在  $r=0.05m$  处水深比平均深度浅 0.0871m，这一变化达到平均深度 0.1629m 的 53%，在公式中贡献的成分比  $H=0.3m$  时打了很多，此时两种理论的曲线差异更大。

下面我们来看一看液面高度在 0.25m 时，背景转速 0.6283rad/s，角速度差为 0.0063rad/s 扰动位置分别为 0.19m、0.31m、0.42m、0.55m 的实验结果。

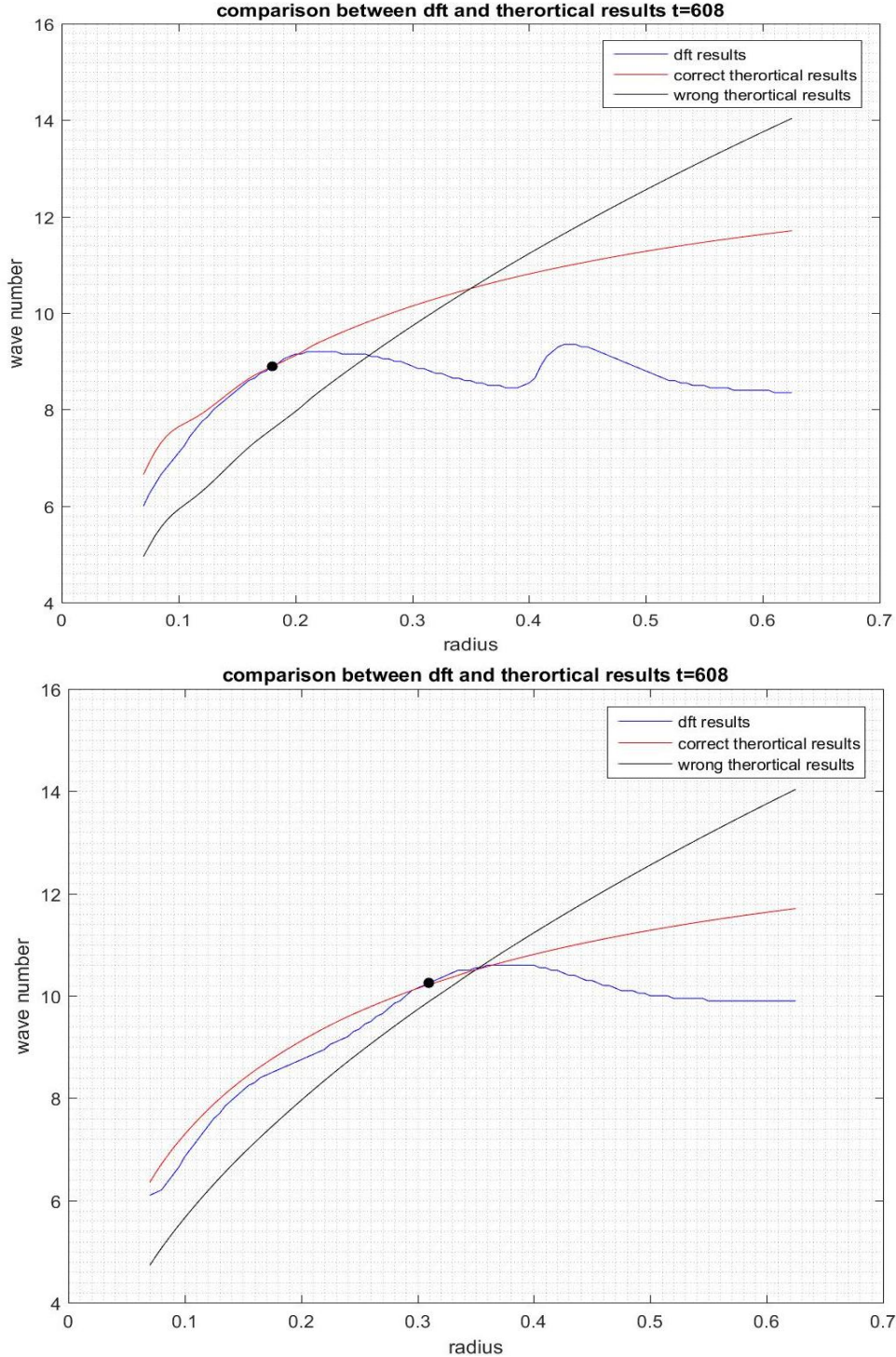


图 29 (上)、30 (下)，图 28 右下图为不同波数功率谱随半径变化，但是不容易与理论值作对比较。将功率最大的波数截取出来绘制曲线如图 29、30 所示。扰动位置  $r=0.19\text{m}$  其中红色的线为采用变化深度的理论值，黑线为采用平均深度的理论值，蓝线为离散傅里叶变换得到的功率值最大的波数。下面两张图图例相同。图 30，扰

动位置  $r=0.31\text{m}$  用黑点表示。

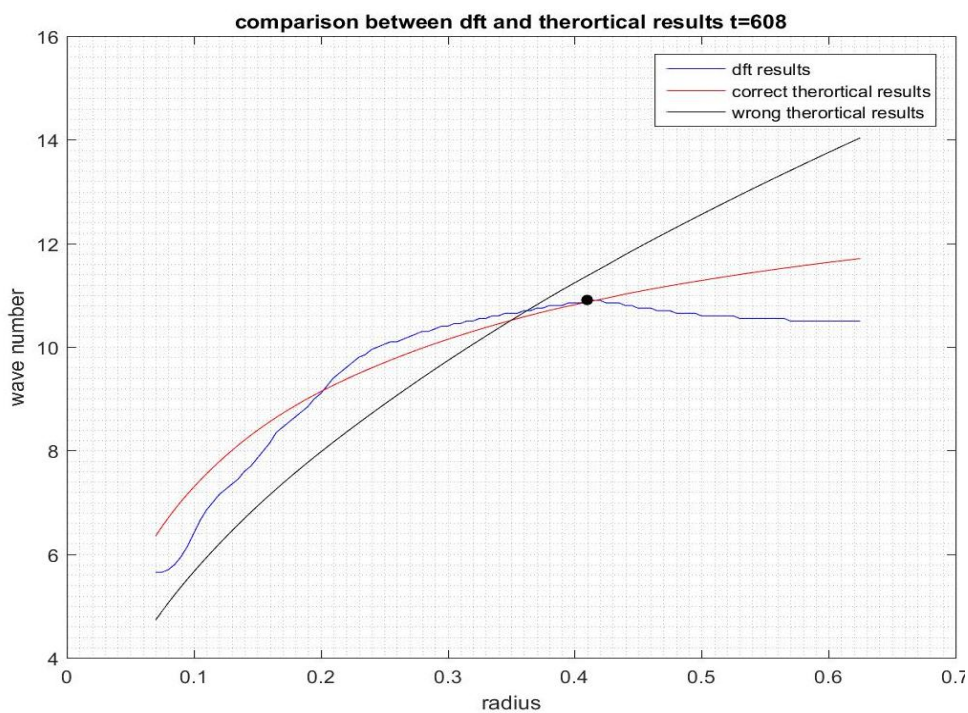


图 31, 扰动位置  $r=0.42\text{m}$

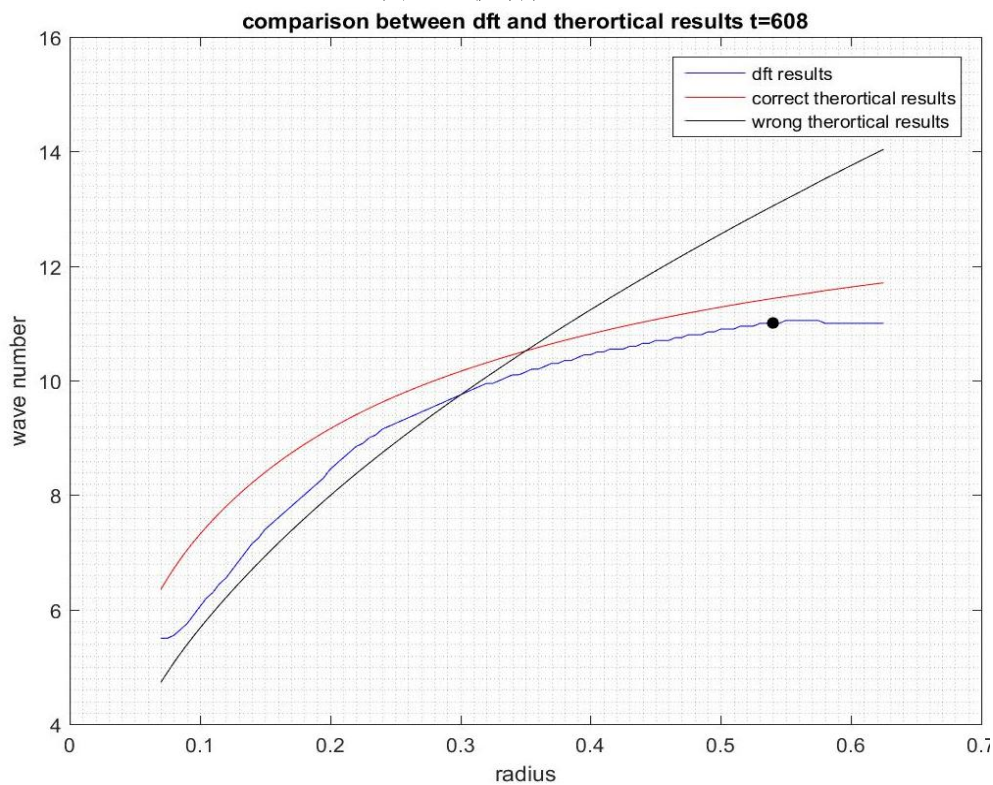


图 32, 扰动位置  $r=0.55\text{m}$

从图 29 到 32 的横坐标为半径大小，纵坐标为该半径圆周处经过离散傅里叶变换之后，功率最大的波数。我们可以看到 DFT 结果在四组实验中

无论是大小还是趋势都与，采用局地水深的驻波计公式

$$k_s = \sqrt{\frac{2\Omega}{\Delta\Omega H} \left( \frac{1}{1 - (r - R/2) \tan 15 / H} \right) \tan 15 r}$$

$$k_s = \sqrt{\frac{2\Omega}{H_{top} - \tan 15 R/2} \frac{\tan 15}{\Delta\Omega} r}$$

水深的计算公式  $k_s$  的蓝色曲线相差很远。这就证明了影响波数结果的是局地深度而不是平均深度。

另外一个现象就是当半径大于扰动地形所处的半径之后，其功率最大的波数值不会跟随理论值增长，而是出现了波数的截断。例如图 29 到 32 半径大于扰动源（用黑点表示）的位置其功率最大波数  $k_s$  与扰动源位置的功率最大波数相同，同时图 28 下图也很好的反映了这一问题。

为了解释以上现象我们引入极坐标系下的正压涡度方程

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \zeta' + \left[ \beta - \frac{\partial}{\partial r} (\zeta_0) + \frac{(f + \zeta_0)}{H - h_0} \frac{\partial z_s}{\partial r} \right] u' = \frac{(f + \zeta_0)}{H - h_0} \left( \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial h'}{\partial \theta} \right)$$

相同，认为自由面的变化与地形的变化相比可以略去，整个场近似水平无辐散（在上文中与正压涡度方程的数值模拟结果十分接近）。这样我们引入地

$$u' = -\frac{g}{fr} \frac{\partial h'}{\partial \theta}, v' = \frac{g}{f} \frac{\partial h'}{\partial r}$$

$\zeta' = \frac{g}{f} \nabla^2 h'$  带入涡度方程中可以将上式化为

$$\left( \nabla^2 - \frac{f(f + \zeta_0)}{H - h_0} \right) \frac{\partial h'}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{r} \left( \nabla^2 - \frac{f(f + \zeta_0)}{H - h_0} \right) \frac{\partial h'}{\partial \theta} - \frac{B}{r} \frac{\partial h'}{\partial \theta} = 0$$

假设  $h' = \Psi(r) e^{i(m\theta - \omega t)}$  得到  $\left( -\omega + \frac{\bar{v}}{r} m \right) \nabla^2 h' + \left( \omega \lambda^2 - \frac{\bar{v}}{r} m \lambda^2 - \frac{B}{r} m \right) h' = 0$  进一步化简得到：

$$\frac{d^2 \Psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Psi}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \Psi + \left( \frac{\frac{B}{r} m}{\omega - \frac{\bar{v}}{r} m} - \lambda^2 \right) \Psi = 0$$

$$\text{其中 } B = \beta - \frac{\partial}{\partial r} (\zeta_0) + \frac{f + \zeta_0}{H - r \tan 15} \frac{\partial z_s}{\partial r}, \lambda^2 = \frac{f(f + \zeta_0)}{H - h_0}$$

由于  $\lambda^2$  比  $\frac{B}{r}m$  小很多可以略去，这样将上式在扰动源半径  $r_0$  附近展

$$\omega - \frac{v}{r}m$$

开取零阶方程。可以得到二阶常系数齐次微分方程，有形成波动解的必要条件为  $A\Psi'' + B\Psi' + C\Psi = 0$  的特征方程判别式  $B^2 - 4AC < 0$ 。对于驻波则有相

速  $c = \frac{\omega}{m} = 0$ ，可以得到  $m^2 < -\frac{4Br_0}{\Delta\omega} - \frac{1}{4}$ ， $B = \frac{f + \zeta_0}{H - r_0 \tan 15} \tan 15$ ，不等式右边第

一项远大于第二项，整个场的截止波数  $m < \sqrt{\frac{\frac{f + \zeta_0}{H - r_0 \tan 15} \tan 15}{\Delta\Omega}} r_0$ ，（ $r_0$  为扰

动源所在半径）在定义时我们可以看到  $h' = \Psi(r)e^{i(m\theta - \omega t)}$ ， $m$  为切向的波数，单位对应的是角度，所以说是与所定义的  $ks = \frac{2\pi r}{Ls} = ks' r$  一致，也就是意味这整个波动长存在一个扰动源位置所决定的径向传播的截止波数。解释了图 29 到 32 在比扰动源半径还大的地方波数停止增长。这与 Rossby 波动的最大径向传播波数有着很大相似之处。

## 七、 总结

正压 Rossby 波动是大气中最为经典的波动之一，其物理含义十分清晰而且科氏力随纬度变化的  $\beta$  效应是地球流体力学所特有现象，这样的波动在大气和海洋科学上应用十分广泛，也是很多如大气动力学、气候动力学的基础之一。这种波动理论早已被前人研究的很深入，在刘士达的大气动力学中，对其相速度、群速度波动的经向传播、波动传播的大圆理论、垂直传播，波动能量的变化等等进行了很深入的讨论（刘式适 刘式达，2011）。但是这种理论是抽象的对于 Rossby 波基本理论的具体的实际物理图形的研究在某些方面是虽然不能说是空缺的。主要的成果集中在上个世纪六、七十年代，没有应用现代的图像分析和记录技术，可以说其结果并不是很直观。总而言之 Rossby 波动理论，与实际大气中的探测数据、现象之间的实验、模拟的桥梁并没有很好地建立起来。这里讲的实验、模拟的特点是指突出 Rossby 波动的物理本质，同时不像实际大气观测的数据一样夹杂太多复杂的干扰因素。这就是本文研究的主要背景。

但是在实验室的地球流体力学实验一般是通过旋转的水槽实现的其地转科氏力可表示为两倍的背景转速  $f = 2\omega$ ，但是统一的背景转速并不能够模拟行星  $\beta$  效应，即科氏力随半径改变，所以说必须采用其他方法。这样根据位涡守恒原理我们用地形  $\beta$  效应（吕克利 等，2014）替代不能够实现的行星  $\beta$  效应，就可以在圆形水槽中实现对于 Rossby 波动的模拟，实验的结果可以参见中国海洋大学张晓爽等和南京带血大气科学学院周昂等做的流体力学实验。这样的流体力学实验可以探究  $\beta$  效应、背景基流  $\bar{u}$  与激发的 Rossby 驻波的关系。水深和背景转速的变化又可以改变  $\beta$  效应的大小。于是在流体力学实验中广泛采用控制变量设置对照组的方法来对

$Ls = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{u}}{\beta}}$ 、 $ks = \sqrt{\frac{\beta}{\bar{u}}}$  这两个公式进行探究。但是这样的流体力学实验

也存在很多问题比如：

- 1，水本身存在粘性，在侧边界和底面边界都存在摩擦作用，会使得通

过减速所获得的背景基流随时间衰减很快，这就意味着 30s 之后的实验现象就会与预设值偏差很大；

2，扰动地形由于边界的摩擦效应会产生切变涡旋对于下游的波动进行干扰，使得波动的形状不很清晰，被涡旋代替；

3，由于没有采用先进的反演方式，对于波长的测量存在很大误差；

4，水槽的半径一般为 30cm，而扰动源的尺度就有接近 10cm，这样就很难精确探究扰动源位置对于激发出的 Rossby 波波长的影响，也就更无法探究同一扰动源（位置确定）所激发出的 Rossby 波动在不同半径位置波长的分布，就像图 29 到 32 所表现的那样，可以说半径分辨率很低。

由于地球流体力学实验的种种局限性，我决定通过数值模式来模拟以上现象。显然上述的 Rossby 波为正压波动，就可以通过将正压浅水方程通过有限差分编程数值模式来对地形激发 Rossby 波动进行数值模拟。考虑到建立模式的可行性以及总动能、总质量和总涡度拟能的守恒性，以及多次数值积分的稳定性，本文采用了总质量、涡度拟能守恒的空间差分格式，以及欧拉后插迭代的时间格式。这样物理过程简单的模式的优点主要就是突出 Rossby 波动形成、传播和维持的主要物理特性，并且有着比实验理想的条件：没有粘性、不存在边界摩擦、背景基流保持不变，并且可以对每一圈进行离散功率谱分析。还有非常重要的一点模式还可以真正的改变科氏力参数随半径的分布，从而比较行星  $\beta$  效应和地形  $\beta$  效应产生的波动有何异同

模式模拟了很多组实验：

1，采用三棱柱形扰动地形，背景转速和角速度差采用  $\omega = 0.6238\text{rad/s}$ ， $\Delta\omega = 0.0063\text{rad/s}$ ，采用 0.3m 和 0.25m 两种液面高度，在  $r=0.17\text{m}$ 、 $r=0.31\text{m}$ 、 $r=0.42\text{m}$ 、 $r=0.55\text{m}$  的位置进行了 8 组实验

2，再用改进过的对数山地地形，在  $r=0.50\text{m}$  的位置，采用 0.25m 和 0.20m 两种水深，背景转速为  $\omega = 0.6238\text{rad/s}$ ，角速度差分别采用  $\Delta\omega = 0.0063\text{rad/s}$ 、 $0.0126\text{rad/s}$ 、 $0.0189\text{rad/s}$ 、 $0.0252\text{rad/s}$  的条件下进行了 8 组实验。

3，将地形  $\beta$  效应改为行星  $\beta$  效应吗，在  $\omega = 0.6238\text{rad/s}$ ， $\Delta\omega$

=0.0126rad/s 的条件下采用 0.25m 和 0.20m 两种液体深度，进行了 2 组实验。在没有背景  $\beta$  效应时观察过山流的 1 组实验。

综合实验现象对比文献结果，可以看到地形  $\beta$  效应可以模拟行星 Rossby 波动，虽然在波数随半径分布上微有差异但是整体的 Rossby 波动形式是相同的。主要激发的波动以驻波为主而且地形类型和放置位置的选取的改变不会影响波动的形式。实验和模式的设计都是成功的。

我们对实验现象进行了进一步探究，得出了一些有趣的结论和猜想：

1，背景基流通过扰动地形时，就会激发不同波长的 Rossby 波动，而且主要的能量集中在驻波附近的波长上。Rossby 驻波主要是以群速的方式传播且相速度为零，但是与此同时也激发了其他波长的波动，波长长于驻波的波动群速相速传播的都更快，可以观察到有长波在顺时针传播（与群速方向相反），在群速到达之前长于驻波的长波的群速先行到达，但产生的波动并不显著。当群速到达时，波动能量显著提高，经过累积并且形成稳定的驻波。

2，另外要产生稳定的 Rossby 驻波地形扰动源必须自始至终的存在，如果中途撤走扰动源，相应驻波能量就会向下游转移，上游振幅快速衰减。同时考虑到 Rossby 波动本身就是频散波，模式本身也会出现波动串级，随着时间进行，整体的波动频散是很可观的。

3，地形 Rossb 驻波波数随半径分布与考虑到局地水深的理论值比较符合，而与只考虑平均水深的  $\beta$  值计算的理论波数相差很大，另外在大于扰动源所处的半径位置，其波数并不随理论值继续增长，存在“截断”效应。可以通过柱坐标系下的波导公式推出理论上径向传播的最大波数的表达式

$$m < \sqrt{\frac{f + \zeta_0}{H - r_0 \tan 15} \frac{\tan 15}{\Delta \Omega}} r_0 \text{ 确定。表达式中的最大波数取决于扰动源位置的}$$

Rossby 驻波波数，与图 29 到 32 观察到的现象是一致的。

总的来说这篇本科论文锻炼了独立编写模式的能力。模式本身物理过程和构架比较简单，但是能够达到进行上百万次的数值积分依然能够保持

稳定，主要现象不发生能量串级，虚假波动的增长十分有限的结果并不是一件容易的事情，需要不断的尝试改进。另一方面通过模式结果结合理论公式更为直观的探究了 Rossby 波动的群速度，能量的传播等物理概念。由于现象直观，本文作者对于这些概念有了更深刻的理解。不足的是本文所提出的一些结论，需要只是初步的实验现象总结，理论上有可能并不完备，另外在查阅文献的过程中相应的前人研究会有漏查的情况。但无论如何，这篇论文是一次辛苦耕耘的过程，带给了我很多收获。

## 参考文献：

Arakawa A, Lamb V R. A potential enstrophy and energy conserving scheme for the shallow water equations[J]. Monthly Weather Review, 1981, 109(1):18-36.

Brian J. Hoskins, Ian N. James. Fluid Dynamics of the Midlatitude Atmosphere[M]. 2014.

周昂. 卓静怡. 王若瑜. 胡越. 旋转平台 Rossby 波的实验模拟研究. 南京大学本科创新计划. 2016

孙旭光. 数值天气预报课件. 2015.

Phillips N A. Numerical Integration of the Primitive Equations on the Hemisphere[J]. Monthly Weather Review, 1959, 87(87):333--345.

Arakawa A, Lamb V R. Computational Design of the Basic Dynamical Processes of the UCLA General Circulation Model[J]. Methods in Computational Physics Advances in Research & Applications, 1977, 17:173-265.

Sansón L Z, Aguiar A C B, Heijst G J F V. Horizontal and vertical motions of barotropic vortices over a submarine mountain. J Fluid Mech[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2012, 695:173-198.

张晓爽, 吕红民. 利用旋转平台模拟 Rossby 波现象的实验研究[J]. 中国海洋大学学报:自然科学版, 2010(S1):9-15.

沈桐立. 数值天气预报[M]. 气象出版社, 2003.

刘式适. 大气动力学[M]. 北京大学出版社, 1991.

吕克利. 动力气象学[M]. 南京大学出版社, 2014.

## 致谢

首先感谢我的辅导老师周博闻，在模式建立的过程中，不仅给予了很多有用的建议，推荐了很多有用的书籍和文献，更主要的是他每周都对我进行耐心的辅导，在有我遇到不懂的问题是，甚至手把手的教学。

其次感谢现在在中科院大气物理研究所读研的傅豪学长，在确立研究方向和模式建立中根据自己的丰富经验提出了非常宝贵的意见。

最后感谢南京大学大气科学学院流体力学实验室的周昂、卓静怡等同学，他们为本文的流体实验部分做出了重要贡献。也同样感谢其他老师，同学的交流与讨论。